Phys. sp. 1 ch 4° Abhandlungen

Abhandlungen des Königl. sächs. meteorologischen Institutes. Heft 1.

1-5

# Vier Abhandlungen

über

## Periodizität des Niederschlages, theoretische Meteorologie und Gewitterregen

von

Prof. Dr. **Paul Schreiber.**

(Sonderabdrücke aus den Jahrgängen 1892—1896 des Civilingenieurs.)

Herausgegeben von der

Direktion des Königl. sächs. meteorol. Institutes in Chemnitz.

LEIPZIG.

In Kommission bei Arthur Felix

1896.

4229

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Abhandlungen des Königl. sächs. meteorologischen Institutes. Heft 1.

# Vier Abhandlungen

über

## Periodizität des Niederschlages, theoretische Meteorologie und Gewitterregen.

von

Prof. Dr. **Paul Schreiber.**

(Sonderabdrücke aus den Jahrgängen 1892—1896 des Civilingenieurs.)

Herausgegeben von der

Direktion des Königl. sächs. meteorol. Institutes
in Chemnitz.

LEIPZIG.
In Kommission bei Arthur Felix
1896.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# Vorwort.

Die hier zusammengestellten Abhandlungen wurden zuerst in dem Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, dem „Civilingenieur“, publizirt. Ich habe sie dem Leserkreise dieser Zeitschrift vorgelegt, weil zu erwarten war, dass die darin behandelten Stoffe unter den Ingenieuren mehr als in anderen Kreisen Verständniss und Interesse finden würden. Es muss der Meteorologie daran gelegen sein, Mitarbeiter für das überwältigend grosse Material an Arbeit zu gewinnen, das zu dem Ausbau der Meteorologie als Wissenschaft vorliegt, wovon deren ganze Nutzanwendung für die verschiedensten Fragen des menschlichen Lebens abhängt. Die Ingenieure sind es, welche die unentbehrlichen mathematisch-physikalischen Hülfswissenschaften zur Ausübung ihres Berufes brauchen und die also mit dem Werkzeug ausgerüstet sind, dessen Beherrschung immer mehr und mehr die Pflicht eines jeden Meteorologen wird.

Leider ist zu konstatiren, dass in anderen für die Meteorologie interessirten Kreisen, namentlich unter den Geographen und den Meteorologen selbst, sich eine auffallende Abneigung, man könnte fast sagen souveräne Verachtung, bezüglich der mathematischen Behandlung unserer Probleme geltend macht.

So findet man in unseren Zeitschriften die Bewegungsvorgänge durch seitenlange Deduktionen behandelt, die zwar dem Scharfsinn der Herren Autoren möglicherweise grosse Ehre machen, mit denen man aber absolut nichts anfangen kann. Es kann ja sein, dass sich die Sache so verhält, sie kann aber auch anders sein, und Klarheit, sowie Fortschritte der Wissenschaft können nur Rechnung und wieder Rechnung bringen, sonst schreiben wir ganze Bände voll und sind schliesslich ebenso klug als zuvor.

Die erste, erst im Laufe dieses Jahres erschienene Arbeit wurde durch die Brückner'schen Klimaschwankungen hervorgerufen und beschäftigt sich mit der Prüfung der Existenz der 35 jährigen Periode in den Jahresmengen des Niederschlages.

Es wäre gewiss ausserordentlich wichtig, wenn diese 35 jährige Periode sicher und ausgeprägt bestände; Herr Brückner hat diese Wichtigkeit zur Genüge dargelegt, so dass ich mich hierüber nicht weiter auszusprechen brauche. Aber sicher ist, dass wir Meteorologen als Prognostiker nur einen sehr geringen Kredit bei dem Publikum haben. Es ist also nöthig, jedes zu Prognosenzwecken aufgestellte Theorem sehr gründlich zu prüfen, um nicht das bischen Ansehen einzubüssen und mit den Herren Rudolph Falb etc. in einen Topf geworfen zu werden. Gerade der Brückner'schen Schrift gegenüber war diese eingehende Untersuchung nöthig, weil Meteorologen, Klimatologen, Geographen etc., durch Umfang und Darstellung des Brückner'schen Werkes bestochen, auf die Existenz der 35 jährigen Periode schwören und dieses als epochemachend darstellen.

Die zweite Arbeit wurde am 10. Oktober 1893 in der Sitzung des Zweigvereins Chemnitz des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vorgetragen. Sie enthält an und für sich wenig Neues. Im ersten Theil dieser Arbeit war ich bemüht, die Zustandsgleichungen in eine handliche Form zu bringen. Es gelang mir durch Einführen des Druckquotienten: „Dunstspannung durch Gesammtdruck“, den Formeln sehr einfache Gestalt zu geben. Ich stellte darnach die Begriffe des Grundzustandes und des Grenzzustandes auf und gab dann, von rein elementaren Formeln ausgehend, die Ausdrücke für die als innere Arbeit (Zeuner) oder Energie (Clausius) bezeichnete Funktion $U$. Daraus leite ich die den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie charakterisirende Differentialgleichung $dQ = AdU + Apdv$ ab und integrire dieselbe für $dQ = 0$, wobei ich im Wesentlichen die von Herrn Hertz wohl zuerst abgeleiteten

Gleichungen der adiabatischen oder isentropischen Linien erhalte. Erst hierbei wurde es nöthig, die spezielleren Formeln der mechanischen Wärmetheorie in Anwendung zu bringen.

Ich hoffe, dass ich mich nicht verrechnet haben werde. Gewiss ist, dass ich möglichst sorgfältig vorgegangen bin, und ich habe mit besonderem Dank anzuerkennen, dass der Herr Direktorialassistent Lindemann des Königl. sächs. meteorologischen Institutes die Rechnungen geprüft und mich an einer Stelle vor einem fatalen Fehler bewahrt hat.

Im zweiten Theil dieser Arbeit gebe ich nur ein Beispiel der Anwendung der Formeln, um wenigstens den Zweck derselben anzudeuten. Ich untersuche den Gleichgewichtszustand der ruhenden Atmosphäre unter bestimmten Annahmen für die Zustandsgleichungen derselben $b = f_1(h, t, \sigma)$, $t = f_2(h)$ und $\sigma = f_3(h)$. Es hat auf mich immer den Eindruck gemacht, als ob in der Meteorologie derartige Betrachtungen etwas oberflächlich angestellt würden. So habe ich erst unendlich kleine Störungen betrachtet, wobei eine Luftmasse um $dh$ seine Stellung ändert. Hierbei scheint es mir nöthig, rasche und langsame Bewegungen zu unterscheiden. Bei den ersteren wird der Grundzustand entschieden konstant bleiben und werden adiabatische Zustandsänderungen anzunehmen sein. Bei letzteren tritt mehr oder weniger Ausgleich der Temperatur und Feuchtigkeit in der bewegten Luftmasse mit den Werthen ein, welche sie auf ihrem Wege vorfindet. Findet dabei voller Ausgleich statt, so wird gegen solche Störungen das Gleichgewicht der Atmosphäre indifferent sein. Anders würde sich aber die Sache gestalten, wenn es sich erweisen könnte, dass der Temperaturausgleich rascher vor sich geht als der des Wasserdampfgehaltes; es würden alsdann Bewegungsvorgänge möglich sein, auf die man bisher noch keine Rücksicht genommen hat. Ich habe diese Bewegungsarten, als mit „Temperaturausgleich“ vor sich gehend, den adiabatischen gegenüber gestellt.

Dann nehme ich an, dass eine Luftmasse durch irgend welche Ursache in grössere Höhe gelangt und bestimme den Gleichgewichtszustand der Atmosphäre gegen derartige Störungen. Wenn auch diese Rechnung nur für absolut ruhende Luft streng gültig ist, so wird sie doch auch bei schwacher Windströmung und dem Aufsteigen resp. Niedersinken nahezu gelten, welche Gebirge u. s. w. in dem Luftstrom bedingen.

Die Weiterführung dieser Rechnungen wurde wesentlich durch das Fehlen der Hülfsmittel hierzu, d. h. der tabellarischen oder graphischen Darstellung der verschiedenen hier in Betracht kommenden Funktionen für die verschiedenen Grundzustände erschwert. Sie wird sich also erst nach Herstellung dieser Hülfsmittel vornehmen lassen.

Gern hätte ich die von Herrn von Bezold behauptete Rolle des Uebersättigungszustandes näher untersucht, an deren Möglichkeit ich, soweit ich es jetzt übersehen kann, zweifeln muss.

Bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes hielt ich es für wünschenswerth, der barometrischen Höhenformel eine einfache Gestalt zu geben, da diese so häufig gebraucht wird und die allgemein verwendete Laplace'sche Form gar zu schwer bei Rechnungen verwendbar ist.

Es gelang mir dies dadurch, dass ich die Schwerekorrektion, was schon längst hätte geschehen sollen, in die Rumpelkammer warf und statt der Laplace'schen Annahme $\sigma = \left(\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2}\right) : 2 =$ Konst. bei der Integration, den einfacheren Ausdruck $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) : 2 =$ Konst. einführte, wodurch ich die einfache Form (Spalte 133)

$$h = 67 \cdot 4 \;\; T \log \frac{B_1}{B_2}$$

erhalte, die sich den anerkannten Formeln als gleichwerthig erweist.

Die letzte Arbeit ist der abgekürzte Abdruck eines Vortrages in dem Zweigverein Chemnitz des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Er erschien mir wünschenswerth, da die Redaktion der meteorologischen Zeitschrift die Aufführung des Vortrages nicht einmal unter den Publikationen zweiter Güte im Literaturbericht für angezeigt erachtet hat.

Indem ich diese Separatausgabe als „erstes Heft unserer Abhandlungen“ meinen Herren Fachkollegen vorlege, bitte ich um Beachtung der Theorie der Gruppenmittelbildungen durch diejenigen, welche sich mit der Periodizität in den Witterungserscheinungen beschäftigen.

Die Ausführungen der zwei auf die theoretische Meteorologie bezüglichen Arbeiten empfehle ich aber der besonderen Berücksichtigung bei der Bearbeitung des auf Ballonfahrten und Gipfelstationen gewonnenen Beobachtungsmateriales.

Chemnitz, am 25. Juni 1896.

Schreiber.

# Inhaltsverzeichniss.

1. Abhandlung.

**Untersuchungen über einige Gesetzmässigkeiten in der Folge jährlicher Niederschlagsmengen.**

(Aus Civilingenieur XLII. Band, 1. und 3. Heft.)


Spalte

Einleitung . . . . . 1

Abschnitt I. **Die behaupteten periodischen Klimaschwankungen** . . . . . 3—14

Kap. 1. Die Ergebnisse der bereits publizirten Arbeiten des sächsischen meteorologischen Institutes . 3

Kap. 2. Prof. Dr. Eduard Brückner's Klimaschwankungen seit 1700 . . . . . 5

Kap. 3. Anderweite Theorien über Klimaschwankungen 12

Abschnitt II. **Das Hann'sche Gesetz von der Konstanz des Verhältnisses der Regensummen zweier Stationen** . . 14—23

Abschnitt III. **Die Kriterien der zufälligen Witterungsfolge** 24—46

Abschnitt IV. **Die Ermittelung periodischer Funktionen aus Beobachtungen durch Gruppenmittel** . . . . . 46—68

Kap. 1. Feststellung der Aufgabe . . . . . 46

Kap. 2. Die Herleitung von $f(x)$ in Form einer Reihe 47

Kap. 3. Die Integralmittelkurve . . . . . 48

Kap. 4. Die Verwendung der Integralmittelkurven bei der Analyse mehrfach periodischer Funktionen 49

Kap. 5. Die Gruppenmittelkurven gebildet aus äquidistanten Ordinaten im Abstand 1 . . . . . 53

Kap. 6. Die Gruppenmittelkurven gebildet aus äquidistanten Ordinaten im Abstand $c$ . . . . . 59

Kap. 7. Kritik der Methoden der Gruppenmittelbildung 60

Kap. 8. Beispiel der Ableitung von Integralmittelkurven . . . . . 64

Abschnitt V. **Die Kriterien der Existenz von Perioden bekannter Länge in Beobachtungsreihen** . . . . . 68—79

Kap. 1. Die Formeln . . . . . 68

Kap. 2. Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel I. Ordnung . . . . . 70

Kap. 3. Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel II. Ordnung . . . . . 71

Kap. 4. Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel III. Ordnung . . . . . 72

Kap. 5. Die Kurven der Lustrenmittel . . . . . 72

Kap. 6. Die Lustrenmittel nochmals nach der Formel $(a + 2b + c) : 4$ ausgeglichen . . . . . 73

Kap. 7. Die Lustrenmittel Brückner's und deren Ausgleichung nach der Formel $(a + 2b + c) : 4$ . 74

Kap. 8. Die Elfjahrmittelkurven . . . . . 76

Kap. 9. Die Fünfunddreissigjahrmittelkurven . . . . 77

Kap. 10. Die Fünfunddreissigjahrmittelkurven hergeleitet aus Elfjahrmitteln . . . . . 78

Kap. 11. Die Ausgleichung der vorigen durch 111gliedrige Gruppenmittel . . . . . 79

Schlussergebnisse . . . . . 79—82


2. Abhandlung.

**Die Grundgleichungen für Zustand und Zustandsänderung in der Atmosphäre.**

(Aus dem Civilingenieur XXXIX. Band, 8. Heft.)


Spalte

Einleitung . . . . . 84

I. Theil. **Die Formeln** . . . . . 85—103

I. Grundzustand und Grenzzustand . . . . . 85

II. Die Zustandsänderung nach der Feuchtseite . . . 87

III. Zustandsänderung nach der Trockenseite . . . . 89

IV. Die Grenzkurve . . . . . 89

V. Die innere Arbeit $U$ . . . . . 90

A) Ausdruck für $U$ bei trockener atmosphärischer Luft . . . . . 90

B) Ausdruck für $U$ bei Wassergas . . . . . 91

C) Ausdruck für $U$ bei Wasserdampf . . . . . 91

D) Die innere Arbeit eines Gemenges atmosphärischer Luft mit Wasserdampf und Wasser resp. Eis 92

E) Die innere Arbeit eines Gemenges von Luft und überhitztem Wasserdampf . . . . . 93

VI. Die Differentialgleichungen der mechanischen Wärmetheorie . . . . . 94

VII. Die adiabatischen Zustandsänderungen . . . . 96

VIII. Die Zustandsgleichungen für eine vertikale Luftsäule 100

II. Theil. **Einige Beispiele der Verwendung der Grundgleichungen** . . . . . 103—118

1. Feststellung des Zustandes der Atmosphäre . . . 104

2. Der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre . . . 106

A) Gleichgewichtszustand der Atmosphäre unter Annahme von Störungen mit Temperaturausgleich 107

B) Gleichgewichtszustand der Atmosphäre unter Annahme von Störungen mit adiabatischer Zustandsänderung . . . . . 108

3. Das Aufsteigen einer Luftmasse bei konstantem Grundzustand unter Einwirkung irgend einer äusseren Ursache . . . . . 109

a) Die Temperaturen . . . . . 112

b) Die Dunstspannungen . . . . . 113

c) Die spezifischen Gewichte . . . . . 115

d) Die Wasserausscheidung . . . . . 115

e) Die bewegende Kraft . . . . . 115


3. Abhandlung.

**Die Zustandsgleichungen einer Luftsäule.**

(Barometrische Höhenformeln.)

(Aus Civilingenieur XL. Band, 4. Heft.)


I. Die Reduktion der Barometerstände . . . . . 119

II. Das spezifische Gewicht der Luft . . . . . 121

III. Die Differentialgleichung . . . . . 122

IV. Die Integration . . . . . 123

V. Erläuterungen und spezielle Formeln . . . . . 124

VI. Schlussergebnisse . . . . . 132


4. Abhandlung.

**Ueber Gewitterregen.**


(Aus Civilingenieur XXXVIII. Band, 4. Heft) 135 ff.

# Untersuchungen über einige Gesetzmässigkeiten in der Folge jährlicher Niederschlagsmengen.

(Hierzu Tafel I—IV.)

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit wurde durch die mich schon lange beschäftigende Frage angeregt, ob sich in den bedeutenden Schwankungen der jährlich fallenden Niederschlagsmengen eine Gesetzmässigkeit finden lasse, um darauf basirend die Weitergestaltung unserer Niederschlagsverhältnisse ableiten zu können. Welche Wichtigkeit diese Frage gerade für Sachsen hat, wo so viele Werke durch Wasserkraft betrieben werden, deren ganzes Wohl und Wehe von den in den Flüssen dahinströmenden Wassermengen abhängt, wo der weit ausgebreitete landwirthschaftliche Betrieb nur bei einem rechten Maass von Regen oder Schnee segensreich gedeihen kann, brauche ich hier nicht auszuführen.

Die Industrie und Landwirthschaft fordern die Erkenntniss der Gesetze der Witterungserscheinungen, ich kann fast sagen, mit Ungestüm.

Ist doch vor kurzer Zeit ein Ausspruch dahin gethan worden, dass alle unsere Publikationen bloss als Makulatur zu betrachten sind, falls wir nun nicht bald sagen könnten, ob und welches der folgenden Jahre nass oder trocken ist, damit der Landmann bei der Bestellung seiner Felder und in seinen sonstigen Maassnahmen sich darnach richten kann.

Gleichwichtig ist diese Angelegenheit für die Holzschleifereien und sonstigen vom Wasser abhängigen Werke, bei denen die Fragen nach theilweisem Dampfbetrieb, nach Thalsperren u. s. w. immer mehr in den Vordergrund treten.

Zuerst gebe ich eine kurze Darstellung dessen, was wir bereits in dieser Angelegenheit gethan haben, und komme dann auf einige andere Arbeiten zu sprechen. Unter diesen sind besonders diejenigen von Brückner und Reis zu nennen, von denen der erstere für eine 35jährige Periode eintritt und damit eine ganze Reihe von wirthschaftlich wichtigen Fragen in Zusammenhang bringt, während der letztere eine 55- resp. 110jährige mit den Sonnenflecken zusammenhängende periodische Schwankung und deren Einwirkung auf die Wasserstände der Flüsse verficht.

Die Autoren, welche über die 11jährige Sonnenfleckenperiode geschrieben haben, und deren hauptsächlichsten Verdienste konnte ich hier nicht anführen, es hätte dies zu viel Raum in Anspruch genommen. Ich bin der Meinung, dass man allen gerecht werden muss, wenn man sich auf eine Darstellung der Arbeiten über irgend ein Thema einlässt.

Da Herr Brückner sich bei seinen Ableitungen auf ein von Herrn Hann aufgestelltes Gesetz stützt und von der Richtigkeit desselben auch die Richtigkeit der Brückner'schen Rechnung und deren Resultate abhängt, musste ich die Berechtigung des Hann'schen Gesetzes untersuchen.

Als ich nun an die Frage nach der Gesetzmässigkeit der Folge der Niederschlagsmengen herantrat, musste erst untersucht werden, ob man die Existenz von Schwankungen, die sich durch irgend eine Formel ausdrücken lassen, annehmen kann und also die Berechtigung hat, nach einer solchen zu suchen, oder ob diese Folge eine rein zufällige ist.

Ich nehme zunächst das letztere an. Man wird dabei jede Jahressumme als eine Grösse betrachten, die aus einem konstanten Werth und einem zufälligen Fehler besteht. Die Konstante wird zuerst durch Bildung des Mittels der Einzelwerthe mit ihrem mittleren Fehler abgeleitet und werden alsdann auf die Fehlerreihe die Kriterien angewendet, welche die Ausgleichungsrechnung auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorschreibt. Von einer weiteren Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Beobachtungsreihen habe ich vorläufig absehen müssen.

Alsdann nahm ich an, dass in dem Verlauf der Niederschlagsmengen gewisse periodische Schwankungen von bekannter Periodenlänge existiren, und entwickelte die Kriterien, welche zur Erkennung dieser Existenz angewandt werden können, sowie eine Methode, die einzelnen Perioden aus den Beobachtungen abzuleiten. Diese Theorie kann kurz als die der Gruppenmittelbildung bezeichnet werden, welche Veranlassung gab zu der Kritik der bisherigen Anwendungen dieses ausserordentlich werthvollen Hilfsmittels.

Die von mir entwickelten Kriterien wende ich dann auf einige Beobachtungsreihen an.

Zu einer Ableitung der als möglich erkannten periodischen Schwankungen konnte ich mich noch nicht entschliessen,

da die von mehreren meiner Collegen behauptete Unzuverlässigkeit der älteren Messungen immerhin möglich ist und die bedeutende Arbeit, welche die Ableitung der periodischen Schwankungen erfordert, sehr leicht sich als vergeblich erweisen könnte.

Die Angelegenheit kann somit trotz der Länge, welche die Arbeit erhalten hat, als abgeschlossen nicht angesehen werden, sondern ist viel eher als der Anfang weiterer umfangreicher Untersuchungen zu betrachten.

Ich hoffe durch die vorliegende Arbeit den Beweis geliefert zu haben, dass wir nur durch eingehende gründliche Rechnungen Aussicht auf Erfolg haben und dass also die hier und da auftauchenden oberflächlichen Rechnereien, die manchmal den einfachsten Regeln der Mathematik in das Gesicht schlagen, nach und nach verschwinden sollten.

Weiter hoffe ich, gezeigt zu haben, welche schöne und wichtige Aufgaben der Meteorologie vorliegen, und dass dieser oder jener, welcher sich gern nützlich machen möchte, bei uns Gelegenheit und reiches Material hierzu findet.

## Abschnitt I.

## Die behaupteten periodischen Klimaschwankungen.

### Kapitel 1.

### Die Ergebnisse der bereits publizirten Arbeiten des sächsischen meteorologischen Institutes.

Die systematische Verarbeitung der älteren Beobachtungen liess ich von Anfang meiner Geschäftsführung an unternehmen. Bereits im Jahre 1885 konnte ich in Gemeinschaft mit meinen damaligen Assistenten Dr. Hoppe und Dr. Birkner in den Mittheilungen des Vereins für Erdkunde in Leipzig unter dem Titel: „Beiträge zur Klimatologie von Sachsen“ eine grössere Arbeit publiziren. Dieselbe ist auch als Anhang I im Jahrbuch 1885 des meteorologischen Institutes enthalten. Im ersten Theil dieser Arbeit gebe ich eine Darstellung der „Temperaturfläche“ von Leipzig. Dr. Hoppe stellte die Temperaturverhältnisse und Dr. Birkner die des Niederschlages, beide nach Monatsmitteln resp. -summen, dar. Wie aus meiner Einleitung zu ersehen ist, hatten wir schon damals die Erörterungen bezüglich „dauernder oder periodischer Veränderungen des Klimas Sachsens“ in das Auge gefasst.

Der Periodizität des Niederschlages hat Dr. Birkner auch einen grösseren Theil seiner Arbeit gewidmet. Als hierher gehörig ist daraus zu erwähnen, dass Dr. Birkner erst versuchte, den Gang der Jahressummen mit dem der Sonnenfleckenkurve in Zusammenhang zu bringen. Es gelang ihm nicht, den vielfach behaupteten parallelen Gang beider Kurven, wonach also starke Bedeckung der Sonnenoberfläche mit Regenreichthum verbunden sein soll, nachzuweisen. Dann wurde durch Bildung der Mittel aus Gruppen von je 5 resp. 6, 7 bis 13 Jahren untersucht, ob eine 11jährige Periode in den Jahressummen der Niederschläge zu Dresden und Freiberg zu erkennen sei. Das hier angewandte Kriterium liess eine solche als nicht wahrscheinlich erkennen, dagegen macht Dr. Birkner auf die Möglichkeit des Vorhandenseins einer 9- und einer 12jährigen Periode aufmerksam.

Es wurde nunmehr die Untersuchung der Niederschlagsverhältnisse auf einer wesentlich breiteren Grundlage begonnen.

Wir stellten die an einem jeden Tage, vom 1. Januar 1864 ab, an 18 bis 22 Stationen gemessenen Niederschlagshöhen in Reihen zusammen. Der Hauptzweck war die Prüfung des Materiales, dessen Werth sich auf diese Weise am besten ergiebt. Dann war es natürlich eine nur geringe Mühe, für jeden Tag das Mittel aus den Niederschlagsmessungen an den einzelnen Stationen zu bilden. Dies wurde also nebenbei unternommen, was ich besonders unter Hinweis auf ein Referat von Dr. Ule im Jahrgang 1894 von Petermann's geographischen Mittheilungen (Literaturbericht Nr. 582) hervorhebe.

Ich nenne diese Mittel oder Durchschnitte aus den auf gleichen Zeitraum bezüglichen Niederschlagsmessungen aller vorhandenen Stationen kurz „Landesmengen“. Wären die Stationen über das ganze Land gleichmässig vertheilt, würde deren Zahl gross genug sein und würden alle Lagearten vertreten sein, so würden diese Mittel thatsächlich die Niederschlagshöhen bei gleichmässiger Vertheilung über das Land angeben. Bei circa 20, dabei mehr oder weniger zufällig gewählten Stationen können die einzelnen Mittel allerdings stark von den entsprechenden thatsächlichen Landesmengen abweichen, aber sie geben doch in Ermangelung des Besseren einen ungefähren Anhalt über die dem Lande zugekommene Niederschlagsmenge.

Ueber alle diese Fragen behalte ich mir noch eingehende Erörterungen vor. Eine andere Bedeutung der „Landesmengen“ wird später zur Sprache kommen. Die sämmtlichen rund $27 \times 365$ Landesmengen vom 1. Januar 1864 bis 31. Dezember 1890 sind im I. Heft unserer Publikationen: „Das Klima des Königreichs Sachsen“*) abgedruckt worden. Dieselben fanden Verwendung zur Ableitung der 25jährigen Mittel 1866—1890 für jeden Jahrestag und erfolgte darnach die Darstellung der jährlichen Periode des Niederschlages durch Tagesmengen, Pentaden, Dekaden- und Monatssummen. Weiter wurde die Dauer der Zeiten trockenen Wetters und derjenigen mit ununterbrochenen Niederschlägen untersucht. Es erfolgte dann die Vergleichung der Niederschlagsverhältnisse der einzelnen Jahre in dem Zeitraum 1864—1890 und wurde endlich die etwaige Abhängigkeit derselben von den Mondphasen erörtert.

Von besonderem Interesse war hier der Gang der Jahresmengen, wie er Tafel I, Fig. 1 dargestellt ist. Darnach begannen unsere Beobachtungen zur Zeit einer Reihe von trockenen Jahren. Während der 11 Jahre 1864—1874 hatte nur ein einziges (1865) eine das Gesammtmittel (724 *mm*) übersteigende Jahressumme des Niederschlages. Alsdann folgte eine Reihe nasser Jahre derart, dass von den 16 Jahren 1875—1890 nur 4 zu kleine Jahresmengen ergaben. Wurde die Reihe der Jahresmengen in Gruppen von je 5 aufeinander folgenden Jahren 1864—1868, 1865—1869, 1866—1870 u. s. w. zusammengefasst und deren Mittel den mittleren Jahren dieser Gruppen 1866, 1867, 1868 u. s. w. zugeschrieben, so ergab sich eine Kurve, welche in

*) Chemnitz, in Kommission bei der Karl Brunner'schen Buchhandlung (Martin Bütz).

regelmässig wiederkehrenden Wellenlinien um eine stark ansteigende Achse auf- und niederschwankt. Diese Schwankungen würden eine 13- bis 15jährige Periodizität haben und die aufsteigende Achse würde eine Zunahme der Jahressummen — unabhängig von der periodischen Schwankung — von 8 *mm* pro Jahr, also circa 240 *mm* in 30 Jahren, ergeben. Ich habe mich schon früher dagegen verwahrt, dass ich darin ein Gesetz der Klimaschwankungen gefunden haben will, und wiederhole dies mit voller Bestimmtheit. Die dargestellten Untersuchungen können und sollen nur den Charakter der Sondirung haben, ich glaube aus den nachstehenden Erörterungen zu beweisen, dass ich bei Ableitung eines Gesetzes ganz anders vorgehe.

## Kapitel 2.

## Prof. Dr. Eduard Brückner's*) Klimaschwankungen seit 1700.

Das 324 Grossoktavseiten umfassende Werk ist dem Nachweis einer 35jährigen Periode des Klimas gewidmet. Untersucht wird die Klimaschwankung an den Pegelständen des Kaspischen Meeres, der abflusslosen Seen, der Flüsse und Flussseen, an den Jahressummen des Niederschlages, den Jahresmitteln des Luftdruckes und der Temperatur, an den Beobachtungen über Eisverhältnisse der Flüsse, Datum der Weinernte und Häufigkeit strenger Winter.

Es ist hier zweifellos ein bedeutendes Material an Beobachtungen zusammengetragen worden, und hat sich Herr Brückner hierdurch ein besonderes Verdienst erworben. Aber es wäre besser gewesen, wenn er mehr das Material selbst publizirt und die ermüdende, sich beständig wiederholende Ableitung der 35jährigen Periode etwas beschränkt hätte. Die Zeit des ein solches Werk Durcharbeitenden wird dadurch in unnöthiger Weise in Anspruch genommen.

Die Herren Autoren, welche solche umfangreiche Bücher schreiben, möchten doch daran denken, dass, wenn die von ihnen behaupteten Gesetze so sicher existiren, dass sie jeder Fachmann — für solche sind doch wohl die Abhandlungen bestimmt — sofort aus den Zahlen oder Kurven erkennen kann, aller umfangreicher Text überflüssig ist.

Sind sie aber nicht so sicher, so muss ein mathematisch-physikalischer Gegenstand auch nach den Gesetzen dieses Theiles der angewandten Mathematik, aber nicht nach der Methode der äussersten Kritik der Geologen und Geographen behandelt werden, und dann wird die Sache selbst um so mehr werth sein, je weniger Worte man darum zu machen braucht.

Ich will mich hier bloss mit dem Kapitel V, welches die „säkularen Schwankungen des Regenfalles“ behandelt, beschäftigen und versuchen, eine möglichst getreue Darstellung des Hauptinhaltes zu geben.

Herr Brückner beginnt mit dem Hinweis auf die Ungenauigkeit der älteren Beobachtungsreihen, bedingt durch die Mangelhaftigkeit der Instrumente und die Art deren Anwendung. Er hat es deshalb für nöthig gehalten, die von ihm zusammengestellten Reihen vor deren Verrechnung auf ihre Homogenität zu prüfen.

Hierzu legt er das Hann'sche Gesetz*):

> „Das Verhältniss der Jahressummen des Niederschlages zweier Stationen in nicht zu grosser Entfernung bleibt von Jahr zu Jahr konstant“

zu Grunde. Die Einwände, welche Herr Kaminsky gegen die Giltigkeit desselben im Bd. XII des Repertoriums für Meteorologie erhoben hat, weist Herr Brückner — auf mir unverständliche Weise — als nicht von Belang zurück.

Die direkte Vergleichung der absoluten Regenmengen soll zur Konstatirung von Diskontinuitäten wenig geeignet sein (Seiten 136 und 137).

Herr Brückner schliesst folgendermaassen: Sind $a$ und $b$ die Regenmengen zweier Orte, $A$ und $B$ deren vieljährige Mittel, so ist nach dem Hann'schen Gesetz

$$a : b = A : B = \text{Konst.},$$

folglich

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B},$$

oder auch

$$100\,\frac{a}{A} = 100\,\frac{b}{B}.$$

Letztere Werthe stellen die Jahresmengen $a$ und $b$ ausgedrückt in Prozenten ihrer langjährigen Mittel $A$ und $B$ dar und sollen mit $r_1$ und $r_2$ (relative Regenmengen) bezeichnet werden. Das giebt das Brückner'sche Gesetz

$$r = \text{Konst. für dasselbe Jahr}$$

oder in Worten:

„Die relativen Regensummen eines Jahres naher Stationen sind einander gleich.“

Die Prüfung der Homogenität führt Herr Brückner nun folgendermaassen aus. Er fand als relative Regenmengen für

| | 1831—45 | 1846—1870 |
|---|---|---|
| Deutschbrod | $r'_1$ | $r''_1$ |
| Prag | $r'_2$ | $r''_2$ |
| Bodenbach | $r'_3$ | $r''_3$ |

Nach seinem Gesetz müsste also

$$r'_1 = r'_2 = r'_3 \text{ und } r''_1 = r''_2 = r''_3 \text{ sein.}$$

Die Zahlenwerthe ergaben aber

$$r'_1 - r'_2 = +14\,\% \qquad r''_1 - r''_2 = -11\,\%$$
$$r'_1 - r'_3 = +12\,\% \qquad r''_1 - r''_3 = -11\,\%$$

daraus folgt zwar: $r'_2 = r'_3$ und $r''_2 = r''_3$, aber die relativen Regenmengen für Deutschbrod sind 1831/45 um 13 % grösser, 1846/70 um 11 % kleiner, es muss also ein Bruch um 1845 eingetreten sein, wonach die erstere Reihe die Werthe um 24 % zu gross ergab und wurde deshalb die Reihe kassirt.

Auf diese Weise hat Herr Brückner die Reihen geprüft und wurden zahlreiche Reihen**) ausgeschieden, aber auch (S. 164) die Reihen von Bressay auf den Shetlandsinseln und Poona in Vorderindien, weil sie in offenem Widerspruch (!) zu denen der Nachbarstationen stehen.

---

*) Geographische Abhandlungen, herausgegeben von Prof. Dr. Penck, Bd. IV, Heft 2. Wien, Ed. Hölzel, 1890.

*) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien, math.-naturw. Klasse, 1880, Bd. LXXXI, Abth. II, S. 57 ff.

**) Wahrscheinlich deshalb auch die Beobachtungen in Freiburg 1381—1840.

Was die Ableitung der gesuchten Periodizität aus den geprüften Reihen betrifft, so meint Herr Brückner (S. 139), „dass die Rechnung mit Millimetern unvortheilhaft sei, weil wegen der von Ort zu Ort wechselnden Grösse des Niederschlages der säkulare Gang der Zahlen an verschiedenen Orten nur schwer hätte verglichen werden können und eine Mittelbildung für ganze Landkomplexe aus gleichem Grunde überhaupt nicht möglich gewesen wäre". Alle diese — mir absolut unverständlichen — Uebelstände hat Herr Brückner vermieden durch Rechnung mit den relativen Regenmengen $r$!

Herr Brückner nimmt zur Bildung der $r$ nicht die Gesammtmittel aus allen Beobachtungen*), sondern die der hier absolut einflusslosen sogenannten Normalperiode 1851—1880, wobei er allerdings richtig bemerkt, dass unter der Voraussetzung der 30—35jährigen Periode die 30—35jährigen Mittel den Normalwerthen sehr nahe kommen müssen.

Endlich behauptet Herr Brückner (S. 141), dass es ausreiche, die Lustrenmittel: 1831/35, 1836/40, 1841/45 u.s.w. statt der vollen Reihe: 1831/35, 1832/36, 1833/37 u.s.w. zur Darstellung der Periodizität zu verwenden. Zum Beweis stellt er die volle Reihe für Prag, Madras und Barnaul graphisch dar und zeichnet die abgekürzten ein. Jeder Unbefangene wird sagen, dass bei Barnaul beide Kurven nahe zusammenfallen, für Madras und Prag aber vollständig verschiedenen Verlauf haben, aber Herr Brückner sieht so etwas nicht.

Nach diesen Erläuterungen seiner Methode giebt Herr Brückner die Tabellen der „relativen Abweichungen" von den vieljährigen Mitteln. Es dürfte zweckmässig sein, auch diese Grössen genauer zu definiren.

Ist $a$ die Jahresmenge einer Station, $A$ das vieljährige Mittel und bedeutet $\Delta = a - A$ die Abweichung der Menge $a$ von $A$, so wird die „relative Jahresmenge" $r$ sein:

$$r = 100\,\frac{a}{A} = 100\,\frac{A+\Delta}{A} = 100 + 100\,\frac{\Delta}{A}.$$

Die „relative Abweichung", d. h. die in Prozenten des vieljährigen Mittels ausgedrückte Abweichung von diesem Mittel, wird sein

$$\varrho = 100\,\frac{\Delta}{A},$$

und es folgt aus dem Hann'schen Gesetz, dass „für denselben Zeitraum die relative Abweichung naher Stationen eine Konstante sein muss".

Zur Illustrirung der Ableitung der Gesetze der 35-jährigen Periode durch Brückner gebe ich hier eine kleine Darstellung, welche aber die Hauptsachen enthält.

Zu der Gruppe 2: Mittleres Norddeutschland, rechnet Herr Brückner: Heiligenstadt 593, Jena 581, Torgau 541, Freiberg 627 und Dresden 590. Die beigesetzten Zahlen sind die mittleren Regenmengen*) in dem Zeitraum 1851—1880.

Herr Brückner bildet die Lustrenmittel zunächst für den Zeitraum 1831—1885 und berechnet deren relative Abweichungen $\varrho$. So findet man (Seite 158):

| | Zeitraum 1800 + | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 31/35 | 36/40 | 41/45 | 46/50 | 51/55 | 56/60 | 61/65 | 66/70 | 71/75 | 76/80 | 81/85 | |
| Heiligenstadt | · | · | · | +24 | +11 | −9 | −2 | −6 | −8 | +13 | +24 | |
| Jena | −9 | −4 | −2 | +1 | +2 | −8 | −9 | · | · | · | · | |
| Torgau | · | · | · | +6 | +25 | −9 | −2 | −6 | −16 | +9 | +6 | |
| Freiberg | · | · | −3 | −8 | +13 | −1 | −3 | +9 | −2 | −1 | +31 | |
| Dresden | −14 | −7 | −3 | −2 | +8 | +4 | −4 | +6 | −12 | −3 | +5 | |
| Mittel roh | −11 | −6 | −3 | +2 | +12 | −5 | −4 | +1 | −9 | +5 | +14 | Seite 167 |
| „ ausgeglichen | −9 | −6 | −2 | +3 | +5 | −1 | −3 | −3 | −3 | +4 | +11 | Seite 168 |
| Extreme | −14 | −7 | −3 | +24 | +25 | +4 | −9 | +9 | −16 | +13 | +24 | |
| | −9 | −4 | −2 | −8 | +2 | −9 | −2 | −6 | −2 | −3 | +5 | |
| Differenz der Extreme | 5 | 3 | 1 | 32 | 23 | 13 | 7 | 15 | 14 | 16 | 19 | |

Nach dem Hann'schen Gesetz und den daraus hergeleiteten Brückner'schen Axiomen müssen die $\varrho$ eines Zeitraumes konstant sein, es sollten also die Zahlen in den Spalten bis auf kleine — selbst den Mitteln aus fünf Jahren noch anhaftende — Fehler übereinstimmen.

Wie weit das zutrifft, lehrt die Zusammenstellung der Extreme und deren Differenzen. Herr Brückner findet diese Uebereinstimmung als befriedigend, nach ihm (S. 164) ergiebt sich die Berechtigung, obige 5 Stationen zu einer Gruppe zusammenzufassen, ohne Weiteres aus der Tabelle.**)

Aus seinem Axiom der Konstanz der $\varrho$ leitet Herr Brückner die Berechtigung ab, in eine mittlere Ordinatenreihe Mittel aus 2 bis 5 Einzelwerthen zusammenzustellen.

Die rohen Mittel gleicht Herr Brückner nochmals nach der Formel $(\varrho_{n-1} + 2\,\varrho_n + \varrho_{n+1}) : 4$ oder an den Enden der Reihe $(2\,\varrho_n + \varrho_{n+1}) : 3$ aus. Die mittleren Ordinatenreihen befinden sich am Schluss der vorstehenden Tabelle.

Herr Brückner hat so aus den Beobachtungen an 321 Orten der Erde 54 (?) Gruppen mit 1 bis 17 Gliedern gebildet, stellt deren mittlere Ergebnisse als gleichwerthig zusammen und bildet daraus Mittelwerthe für grössere Komplexe bis über die Gesammtheit aller Kontinente.

Eine Auswahl der so erhaltenen ausgeglichenen Ordinatenreihen ist nachstehend gegeben. Die Zahlen für die

*) Hierüber vergleiche Spalte 22 Formel 16 u. s. w.

**) Dass 1846/50 Heiligenstadt 24% des normalen Betrages zu viel, Freiberg 8% zu wenig gehabt hat, macht nichts aus, das sind kleine Zufälligkeiten oder Fehler!

*) Es sei gestattet, da weiterhin nur von Jahressummen des Niederschlages und deren vieljährigen Mitteln die Rede sein wird, dafür den kurzen Ausdruck Regenmenge anzuwenden.

Kontinente von 1831 an wurden nach den Angaben des Originales (Seite 172) erst ausgeglichen, da dies Herr Brückner vergessen hat.

Herr Brückner zieht nun folgende Schlüsse:

„Sämmtliche Länder erleben gewisse Schwankungen."

„In keinem Gebiet bleibt der Regenfall von Lustrum zu Lustrum auch nur angenähert (?) gleich."

Tafel der ausgeglichenen Lustrenmittel der relativen Abweichungen der Regenmenge:

| Lustrum | Mittel-Nord-Deutschland | Mitteleuropa: Deutschland Nord- | Mitteleuropa: Deutschland Süd- | Mitteleuropa: Böhmen | Welttheile: Europa | Welttheile: Asien | Welttheile: Australien | Welttheile: Amerika Nord- | Welttheile: Amerika Süd- | Ganze Erde | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1691—95 | | | | | 4 | | | | | | |
| 1696—00 | | | | | 4 | | | | | | nass |
| 1701—05 | | | | | 2 | | | | | | |
| 1706—10 | | | | | 3 | | | | | | |
| 1711—15 | | | | | 4 | | | | | | |
| 1716—20 | | | | | — 2 | | | | | | trocken |
| 1721—25 | | | | | — 4 | | | | | | |
| 1726—30 | | | | | — 2 | | | | | | |
| 1731—35 | | | | | — 1 | | | | | | |
| 1736—40 | | | | | 2 | | | | | | nass |
| 1741—45 | | | | | 1 | | | | | | |
| 1746—50 | | | | | 2 | | | | | | |
| 1751—55 | | | | | 3 | | | | | | |
| 1756—60 | | | | | 0 | | | | | | trocken |
| 1761—65 | | | | | — 2 | | | | | | |
| 1766—70 | | | | | 0 | | | | | | |
| 1771—75 | | | | | 2 | | | | | | nass |
| 1776—80 | | | | | 0 | | | | | | |
| 1781—85 | | | | | — 2 | | | | | — 1 | |
| 1786—90 | | | | | 0 | | | | | 0 | |
| 1791—95 | | | 5 | | — 1 | | | | | — 1 | trocken |
| 1796—00 | | | 2 | | — 2 | | | | | — 2 | |
| 1801—05 | | | 5 | | — 1 | | | | | — 1 | |
| 1806—10 | | | 10 | 1 | 1 | | | | | 1 | |
| 1811—15 | | | 7 | 4 | 1 | 2 | | | | 1 | nass |
| 1816—20 | | | — 5 | 1 | — 1 | 9 | | 1 | | — 3 | |
| 1821—25 | | | — 10 | — 3 | — 1 | 9 | | 0 | | — 3 | |
| 1826—30 | | | — 7 | — 5 | — 3 | 5 | | — 2 | | — 2 | trocken |
| 1831—35 | — 9 | — 9 | — 6 | — 4 | — 6 | — 7 | | — 7 | — 10 | — 6 | |
| 1836—40 | — 6 | — 4 | — 1 | 1 | — 2 | — 7 | | — 7 | — 16 | — 4 | |
| 1841—45 | — 2 | 0 | 3 | 6 | 2 | 4 | — 2 | 1 | — 8 | 0 | nass |
| 1846—50 | 3 | 3 | 2 | 7 | 2 | 9 | 10 | 8 | 5 | 2 | |
| 1851—55 | 5 | 2 | — 2 | 5 | 1 | 2 | 13 | 4 | 11 | 0 | |
| 1856—60 | — 1 | — 4 | — 9 | — 2 | — 4 | — 7 | 4 | — 6 | 4 | — 3 | trocken |
| 1861—65 | — 3 | — 5 | — 10 | — 8 | — 6 | — 11 | 0 | — 5 | — 7 | — 4 | |
| 1866—70 | — 3 | — 1 | — 2 | — 5 | — 2 | — 6 | 7 | 1 | — 11 | — 1 | |
| 1871—75 | — 3 | 0 | 7 | 1 | 3 | 7 | 9 | 2 | — 5 | 2 | nass |
| 1876—80 | 4 | 4 | 15 | 10 | 7 | 18 | — 2 | 5 | 4 | 5 | |
| 1881—85 | 11 | 6 | 16 | 12 | 7 | 22 | — 13 | 10 | 9 | 6 | |

„Allein auch eine kontinuirliche Aenderung nach einer Seite hin ist nirgends zu spüren."*)

„Andererseits wechseln die Vorzeichen der Abweichungen nicht von Lustrum zu Lustrum. Es treten Lustren mit gleichen Vorzeichen zu Gruppen zusammen, d. h. es wechseln Zeiten unter- und übernormalen Niederschlages."

*) Hierüber vergl. man obige Reihen für Mittelnorddeutschland, Norddeutschland u. s. w. sogar die für die ganze Erde und die Ergebnisse des fünften Abschnittes.

„Die Nass- und Trockenzeiten fallen zeitlich nicht überall genau zusammen", Seite 170, während Herr Brückner auf Seite 164 und 172 der Meinung ist, dass sie überall zusammenfallen. Die Ordinatenreihen für die Erdtheile sollen schlagend die Allgemeinheit der Schwankungen des Regenfalles in allen Erdtheilen beweisen. (S. 172 Australien?) Die Trocken- und Nasszeiten, welche Herr Brückner ableitet, sind in der vorstehenden Tabelle durch Zwischenräume getrennt worden. Herr Brückner meint, „dass vor 1831 die Gleichzeitigkeit der Schwankungen weniger ausgesprochen ist, vermuthlich wegen der geringen Güte und Zuverlässigkeit der Reihen" (S. 189), er nimmt deshalb einige ganz vereinzelte Angaben (S. 191) über den Stand des Kaspischen Meeres, Wansee, Umiasee, Lake George (Australien), See von Valencia, Neusiedlersee, Tsadsee und Zirknitzersee zu Hülfe, und mit diesem bedeutenden Material werden die Trocken- und Nassperioden von 1690 bis 1830 abgeleitet.

Für die Gleichzeitigkeit dieser Perioden auf der ganzen Erde sucht Herr Brückner noch den Beweis auf andere Weise beizubringen. Er zählt aus, wieviel von allen in einem jeden Lustrum vorhandenen Gruppen Maximal- und Minimalmengen des Niederschlags hatten und stellt dies tabellarisch zusammen. Die drei von Herrn Brückner gegebenen Tabellen sind nachstehend in eine zusammengefasst worden.

| Lustrum | Zahl der Gruppen | Davon hatten: Maxima | Davon hatten: Minima | Zahl der Extreme reduzirt auf 100 Gruppen: Maxima % | Minima % | zusammen % | Verhältniss der Extreme nach gleichmässiger Vertheilung der anderen Gruppen ohne solche: Maxima % | Minima % | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1731—35 | 3 | 1 | 2 | 33 | 67 | 100 | 33 | 67 | nass |
| 1736—40 | 3 | 3 | — | 100 | — | 100 | 100 | — | |
| 1741—45 | 5 | 1 | 3 | 20 | 60 | 80 | 30 | 70 | |
| 1746—50 | 5 | 1 | — | 20 | — | 20 | 60 | 40 | trocken |
| 1751—55 | 6 | 4 | 1 | 66 | 16 | 82 | 74 | 24 | |
| 1756—60 | 5 | 1 | 3 | 20 | 60 | 80 | 30 | 70 | |
| 1761—65 | 7 | 3 | 2 | 43 | 29 | 72 | 57 | 43 | nass |
| 1766—70 | 7 | 1 | 3 | 14 | 44 | 58 | 35 | 65 | |
| 1771—75 | 7 | 4 | 1 | 58 | 14 | 72 | 72 | 28 | |
| 1776—80 | 8 | — | 4 | — | 50 | 50 | 25 | 75 | trocken |
| 1781—85 | 8 | 2 | — | 25 | — | 25 | 63 | 37 | |
| 1786—90 | 8 | 2 | 1 | 25 | 12 | 37 | 56 | 44 | |
| 1791—95 | 9 | — | 1 | — | 11 | 11 | 45 | 55 | |
| 1796—00 | 9 | — | 1 | — | 11 | 11 | 44 | 56 | |
| 1801—05 | 10 | 2 | 4 | 20 | 40 | 60 | 40 | 60 | |
| 1806—10 | 12 | 2 | — | 17 | — | 17 | 59 | 41 | nass |
| 1811—15 | 14 | 4 | — | 29 | — | 29 | 65 | 35 | |
| 1816—20 | 16 | 3 | — | 18 | — | 18 | 59 | 41 | |
| 1821—25 | 16 | 4 | 3 | 25 | 18 | 43 | 54 | 46 | trocken |
| 1826—30 | 16 | 2 | — | 12 | — | 12 | 56 | 44 | |
| 1831—35 | 31 | 2 | 18 | 6 | 58 | 64 | 24 | 76 | |
| 1836—40 | 38 | 5 | 11 | 13 | 29 | 42 | 42 | 58 | nass |
| 1841—45 | 44 | 10 | 4 | 23 | 9 | 32 | 57 | 43 | |
| 1846—50 | 50 | 13 | 1 | 26 | 2 | 28 | 62 | 38 | |
| 1851—55 | 56 | 10 | 7 | 18 | 12 | 30 | 53 | 47 | trocken |
| 1856—60 | 59 | 2 | 13 | 3 | 22 | 25 | 40 | 60 | |
| 1861—65 | 60 | 10 | 22 | 17 | 37 | 54 | 40 | 60 | |
| 1866—70 | 60 | 6 | 11 | 10 | 18 | 28 | 46 | 54 | nass |
| 1871—75 | 59 | 10 | 6 | 17 | 10 | 27 | 54 | 46 | |
| 1876—80 | 58 | 25 | 2 | 43 | 3 | 46 | 70 | 30 | trocken |
| 1881—85 | 57 | 14 | 1 | 25 | 2 | 27 | 61 | 39 | |

Bei dem Anblick dieser Tabelle wird Herr Brückner ganz begeistert, er ruft aus: „Fürwahr ein gewaltiges Ueberwiegen“ (der Maximalgruppen in den Nasszeiten und umgekehrt der Maximalgruppen in den Trockenzeiten).

Man kann im Allgemeinen Herrn Brückner zustimmen, aber wird doch durch die Frage etwas deprimirt, wie sich z. B. 1876/80 die 31 Gruppen erhalten haben, die weder Maxima noch Minima hatten? Diese können entweder alle normal verlaufen sein, oder ein Theil ist über-, der andere unternormal gewesen. In der That kann man 44 positive und 14 negative Abweichungen zählen. Die Maximalgebiete sind also nicht 12mal, sondern nur 3mal so häufig als die Minimalgebiete. Ich habe an der Seite der vorstehenden Tabelle die Gebiete ohne Extreme zur Hälfte zu den Maximalgebieten, zur andern Hälfte zu den Minimalgebieten gerechnet und überlasse es dem Leser, hieraus seine Schlüsse zu ziehen. Jedenfalls würde Herr Brückner wohl besser gethan haben, die Gruppen mit positiven Abweichungen denen mit negativen gegenüber zu stellen.

Das Ergebniss dieser Erörterungen fasst Herr Brückner dahin zusammen, dass er gefunden hat (S. 191):

| 6 feuchte Perioden | | 5 trockene Perioden | |
|---|---|---|---|
| 1691—1715 : 25 | Jahre | 1716—1735 : 20 | Jahre |
| 1736—1755 : 20 | „ | 1756—1770 : 15 | „ |
| 1771—1780 : 10 | „ | 1781—1805 : 25 | „ |
| 1806—1825 : 20 | „ | 1826—1840 : 15 | „ |
| 1841—1855 : 15 | „ | 1856—1870 : 15 | „ |
| 1871—1885 : 15 | „ | | |
| Mittel | 17,5 ± 2,1 Jahre | | 18,0 ± 2,0 Jahre |

Periodendauer 35,5 Jahre

„Es ist ein vollkommenes System der Schwankungen, das wir auffanden und 200 Jahre zurück verfolgen konnten“ (S. 192).

Die Intensität der Schwankungen, d. h. die Zu- resp. Abnahme der relativen Regenmenge von einem Extrem zum andern leitet Herr Brückner einfach aus den unausgeglichenen Ordinatenreihen für die Erdtheile ab und findet (S. 173):

| | Anstieg von 1830—50 | Fall von 1850—60 | Anstieg von 1860—80 | Mittel |
|---|---|---|---|---|
| Europa | 14 % | 14 % | 20 % | 16 % |
| Asien | 27 „ | 26 „ | 36 „ | 30 „ |
| Australien | — „ | 23 „ | 20 „ | 22 „ |
| Nord-Amerika | 28 „ | 26 „ | 23 „ | 26 „ |
| Süd-Amerika | 35 „ | 28 „ | 22 „ | 28 „ |
| Mittel | 26 % | 23 % | 24 % | 24 % |

Nimmt man hierzu die ausgeglichenen Reihen, so ändert sich das Bild folgendermaassen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Europa | 8 % | 8 % | 13 % | 10 % |
| Asien | 16 „ | 20 „ | 33 „ | 23 „ |
| Australien | — „ | 10 „ | 9 „ | 9 „ |
| Nord-Amerika | 15 „ | 14 „ | 16 „ | 15 „ |
| Süd-Amerika | 27 „ | 22 „ | 20 „ | 23 „ |
| Mittel | 16 % | 15 % | 18 % | 16 % |

Herr Brückner sagt hierzu (S. 173):

„Die geringste Schwankung hat Europa — nur 16 % (10 %?). Bei Asien erreicht sie den doppelten Betrag. Im Durchschnitt der Erde beläuft sie sich auf ungefähr 24 % (16 %?). Die Schwankungen, mit denen wir es zu thun haben, sind also sehr gross. Sehr wichtig ist es, dass dieselben im Laufe der Zeit nur einen geringen Wechsel der Intensität zeigen. Diese Gleichmässigkeit*) der Zahlen ist uns eine Gewähr dafür, dass sie wirklich gute Näherungswerthe darstellen.“

Das ist die Ableitung eines so wichtigen Gesetzes durch Herrn Prof. Dr. Eduard Brückner!!!

Besonders bemerkenswerth ist, dass, wie Herr Brückner selbst nachweist, im Innern der Kontinente die Regenmenge klein, die Schwankungen (absolut) viel grösser sind als an den Ufergebieten. Der Satz von der Konstanz der relativen Schwankungen, den Herr Brückner an die Spitze seiner Ableitungen stellt, kann daher nur eine sehr beschränkte Giltigkeit bei sehr nahe und gleichartig gelegenen Stationen haben.

Die Gruppenbildungen bis zum Generalmittel über die Erde haben als Grundlage die allgemeine Giltigkeit des Satzes von der Konstanz der relativen Schwankungen.

Ist dieser Satz falsch, wie dies Herr Brückner selbst nachweist, so fällt auch die ganze Berechtigung der Art der Rechnung des Herrn Brückner, die dann den Charakter eines Exempels

100 Mark + 100 Thaler + 100 Gulden + 100 Dollars
= 400 (aber was?)

hat.

## Kapitel 3.

## Anderweite Theorien über Klimaschwankungen.

Die Frage: ändert sich das Klima oder ist es konstant, ist eine etwaige Aenderung einseitig fortschreitend oder eine periodisch hin- und herschwankende, ist seit vielen Jahren in unzähligen grossen und kleinen Schriften behandelt worden.

Die Ansichten sind ausserordentlich verschieden. Einige nehmen eine andauernde Aenderung des Klimas nach einer Seite hin an, wobei die Meinung von der Abnahme des Wassers und der Temperatur die vorherrschende zu sein scheint. Andere behaupten, dass die durchschnittlichen klimatischen Verhältnisse in historischen Zeiten konstant geblieben sind.

Die meisten Anhänger zählt die Lehre von den periodischen Klimaschwankungen, jedoch ist die Frage nach den Gesetzen derselben, also nach den Periodenlängen, den Epochen und den Amplituden noch eine viel umstrittene.

Unter allen behaupteten Periodenlängen spielt die der Sonnenflecken und deren Vielfache die Hauptrolle. Die Fleckenbildung auf der Sonnenoberfläche wechselt beständig und zeigt eine ziemlich regelmässig verlaufende Periodizität derart, dass in Zeiträumen von durchschnittlich $11\frac{1}{9}$ Jahren starke Fleckenentwickelungen (Maximaljahre) oder auch fleckenarme Zeiten (Minimaljahre) aufeinander folgen.

Man hat ein gewisses Recht zu der Annahme, dass entweder die Ursachen, welche so bedeutsame Veränderungen in der Sonnenatmosphäre bewirken, nicht wirkungslos auf

*) Europa 14 % zu 20 %, bezw. 8 % zu 13 %; Asien 26 % zu 36 %, bezw. 16 % zu 33 % u. s. w., ist das wirklich eine bemerkenswerthe Gleichmässigkeit?

die Atmosphären ihrer Planeten sind, oder dass diese Fleckenbildungen die Sonnenstrahlung verändern und dadurch auf die Witterungsvorgänge auf den Planeten, also auch der Erde, wirken.

Diese so mit Recht zu vermuthende Abhängigkeit kann man also auf doppelte Weise behandeln. Entweder man nimmt gemeinsame Ursachen an und stellt die Frage, ob in dem Witterungsverlauf die Perioden von $11^1/_9$, 56 oder 110—112 Jahren u. s. w. zu erkennen sind, welche die Sonnenfleckenkurve zeigt, oder man bringt die Witterungsvorgänge direkt mit den Relativzahlen der Flecken in Verbindung und sucht sie als Funktionen derselben darzustellen.

Beide Wege sind in den vielen hierüber existirenden Arbeiten eingeschlagen worden, jedoch nach meiner Meinung in so ungenügender Weise, dass man heute noch ein bestimmtes Resultat, mit dem etwas angefangen werden könnte, als fehlend zu bezeichnen hat. Jedoch lässt die Gesammtheit aller dieser Arbeiten annehmen, dass die Sache einen gesunden Kern haben muss, so dass es eine dankbare Aufgabe für einen tüchtigen Rechner (der nebenbei aber auch guter Mathematiker sein möchte) ist, einmal gründlich das grosse vorliegende Beobachtungsmaterial vorzunehmen. Vielleicht zeigt sich dabei gar, dass Herrn Brückner's neu erfundene und von anderen nur geahnte $35 \pm 2$ jährige Periode einfach $11^1/_9 \times 3$ ist, also auch hiermit zusammenhängt.

Erwähnen will ich hier nur noch ein Theorem von Herrn Reis*).

In seinem interessanten Schriftchen geht Herr Reis davon aus, dass die stärksten Entwickelungen der Sonnenflecken (Maxima 1. Klasse) in Zeiträumen von 110—112 Jahren ($10 \times 11^1/_9$) wiederkehren, dazwischen aber ebenfalls starke, jedoch etwas weniger entwickelte Maxima 2. Klasse auftreten. Die hervorragenden Maxima haben also Abstände von je 56 Jahren. Dies bewirkt folgende gesetzmässige Aenderungen in dem Klima. Es folgen aufeinander mit durchschnittlich 28 Jahren Dauer:

1. Maximalzeit 1. Klasse: 14 Jahre vor und nach den Fleckenmaximen 1. Klasse. Vorherrschen von Schnee und Regen, grosse Bewölkung, kühle Sommer und milde Winter (1770—1798).

2. Minimalzeit 1. Klasse: die darauf folgenden circa 28 Jahre, Trockenheit, strengste Winter, heisse Sommer (1798—1826).

3. Maximalzeit 2. Klasse: 14 Jahre vor und nach den Fleckenmaximen 2. Klasse, derselbe Charakter, wie bei der Maximalzeit 1. Klasse, aber nicht so extrem (1826—1853).

4. Minimalzeit 2. Klasse, darauf folgend, Charakter wie bei der Minimalzeit 1. Klasse, aber nicht so extrem (1853 bis circa 1880).

Alsdann wird wieder Maximalzeit 1. Klasse folgen, in der wir also jetzt leben und die bis zum Ende des Jahrhunderts währen soll.

Herr Reis gründet seine Ansichten auf die Wasserstände des Rheines und nimmt an, dass bei Abweichungen der Witterung von diesem periodischen Verlauf auch die Grundursache, die Sonnenfleckenentwickelung, dieselbe Abweichung zeigt.

Die ganze Periode in der Klimaschwankung würde darnach eine Länge von 110 Jahren haben. Würde man eine Ordinatenreihe nach der Bessel'schen Formel darstellen, so würden vermuthlich die Koeffizienten der von dem einfachen, doppelten und 10 fachen Winkel $\varphi = \left(\frac{360}{110}\right)^0$ abhängigen Glieder besonders gross werden, und wenn Herrn Brückner's Theorie richtig ist, auch das Glied für den dreifachen Winkel besondere Grösse erreichen. Es erscheint dies besonders interessant. Die Reihe

$$s = u_0 + u_1 \sin(\varphi + U_1) + u_2 \sin(2\varphi + U_2) + \ldots + u_{10} \sin(10\varphi + U_{10})$$

würde die Gesammtreihe als aus Sinuskurven von 110-, 55-, 37-, 27-, 22-, 18-, 16-, 14-, 12- und 11 jähriger Periodenlänge zusammengesetzt ergeben und davon würde die 37 jährige nahe mit Brückner's 35- und Wild's 40 jähriger, die 22 jährige mit Wild's 23 jähriger, die 18 jährige mit der berühmten Mondperiode zusammenfallen, und würde man auch für die kürzeren Wellen bereits aufgestellte Periodizitäten finden können.

*) Die periodische Wiederkehr von Wassersnoth und Wassermangel im Zusammenhange mit den Sonnenflecken u. s. w. von Prof. Dr. Paul Reis in Mainz. Leipzig, Quandt & Händel.

## Abschnitt II.

## Das Hann'sche Gesetz von der Konstanz des Verhältnisses der Regensummen zweier Stationen.

Bedeuten $s_1$ und $s_2$ die Regenmengen zweier Stationen, so soll nach Hann

$$s_1 : s_2 = \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sein, wo $\sigma$ eine für die beiden Stationen konstante Grösse ist.

Der Beweis dieses Satzes findet sich in den Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Klasse der Wiener Akademie der Wissenschaften*), und zwar sind die Zahlen kurz folgende:

| Stationen: | Entfernung in Meilen | Zahl der Jahre | Verhältniss der jährlichen Regenmengen | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Max. | Min. | Mittel |
| Kalksburg : Wien . . | 2 | 12 | 1.31 | 1.07 | 1.14 |
| Brünn : Wien . . . | 15,5 | 10 | 0.98 | 0.71 | 0.83 |
| Linz : Kremsmünster . | 4 | 10 | 0.90 | 0.67 | 0.79 |
| Ischl : Kremsmünster . | 7 | 10 | 1.75 | 1.38 | 1.58 |
| Ischl : Salzburg . . | 6,5 | 9 | 1.73 | 1.18 | 1.43 |
| Triest : Görz . . . | 5 | 9 | 0.82 | 0.61 | 0.69 |

Man sieht daraus, dass die Beweise des Gesetzes, auf das Herr Brückner seine ganze Rechnung stützt, sehr dürftig sind. Ob noch weitere Beweise da sind, weiss ich nicht, Herr Brückner zitirt in seinem Werk nur die vorstehende Tabelle.

Von einer wirklichen Konstanz der Verhältnisse bei so wenig Werthen für jedes Verhältniss selbst kann wohl kaum die Rede sein. Das Verhältniss Ischl : Salzburg schwankt zwischen 1,18 und 1,73, die Abweichungen der

*) Bd. LXXXI, II. Abth., 1880, S. 12.

Extreme vom Mittel betragen bis $\pm 0{,}3$, d. h. bis zu $\pm 21\,\%$ des Mittelwerthes. Formel 1 wird sich anwenden lassen, um aus einem gegebenen $s_2$, wenn $\sigma$ bekannt ist, den Werth $s_1$ zu berechnen.

Es ist

$$s_1 = \sigma\, s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Würde man also aus einer Regenmenge in Salzburg die entsprechende in Ischl berechnen wollen, so würde der Werth zwischen $1{,}18\,s_2$ und $1{,}73\,s_2$ liegen, also zwischen Grenzen schwanken, die $0{,}55\,s_2$, d. h. $55\,\%$ der Regenmenge $s_2$ betragen.

Aus Formel 2 kann man leicht

$$100\,\frac{ds_1}{s_1} = 100\,\frac{d\sigma}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ableiten, was heisst, dass der Fehler $ds_1$ in Prozenten von $s_1$ ausgedrückt, gleich dem Fehler $d\sigma$ in Prozenten von $\sigma$ ist. Da die Extreme in $\sigma$ bei Ischl : Salzburg um $\pm 21\,\%$ des Mittelwerthes $\sigma = 1{,}43$ von diesem abweichen, wird das Gleiche von den Fehlern der mit diesem Mittelwerth berechneten Regenmengen $s_1$ gelten. Die Vortheile der Verhältnisszahlen gegenüber den absoluten Mengen, welche Herr Hann auf Seite 12 der genannten Abhandlung aufführt, sind mir nicht recht verständlich.

Man kann die Gültigkeit des Hann'schen Gesetzes prüfen, indem man sich die Frage nach der theoretischen Berechtigung desselben stellt, welche meines Wissens bis jetzt noch nicht behandelt worden ist. Herr Hann selbst hat ausser dem erwähnten rein empirischen Beweis, der noch dazu auf viel zu wenig Beobachtungsmaterial beruht, keinen theoretischen Beweis beigebracht.

Als Thatsache wird man betrachten können, dass die Regenmenge von der Lage der Station auf der Erdoberfläche abhängig ist. Bezeichnet man mit $\varphi$ und $\lambda$ die geogr. Breite und Länge und mit $h$ die Seehöhe eines Ortes, so wird für die Regenmenge $s$ die allgemeine Gleichung

$$s = f(\varphi, \lambda, h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gelten. Die Funktion selbst wird ziemlich komplizirt sein. Es wird kaum möglich sein, einen über die ganze Erde gültigen Ausdruck aufzustellen; man wird sich begnügen müssen, zunächst für kleinere Bezirke die Funktionen zu ermitteln, so dass man $h$ eliminiren kann, und dann dürfte die Herleitung eines Näherungsausdruckes für $f(\varphi, \lambda, 0)$ wohl nicht zu den Unmöglichkeiten gehören.

Handelt es sich um ein kleineres Gebiet, aber mit relativ bedeutenden Höhenunterschieden, so wird man in erster Annäherung die horizontale Aenderung der Regenmenge als klein gegenüber dem Einfluss der Höhenlage betrachten können. Bezeichnet dann $\varphi_0$ und $\lambda_0$ die Lage eines mittleren Ortes des Gebiets, so kann man

$$s = f(\varphi_0, \lambda_0, h) = a + b\,h + c\,h^2 + \ldots \quad . \quad (5)$$

setzen, worin

$$a = f(\varphi_0, \lambda_0, 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$b$, $c$ . . . . . aber gewisse Koeffizienten sein werden. Von diesem Gesichtspunkte aus habe ich die Niederschlagsmessungen in Sachsen behandelt.

Es wurden die Regenmengen $s$ als Ordinaten über Abszissen $h$ aufgetragen und liessen die Punktreihen erkennen, dass die Annahme ihrer Gruppirung um eine aufsteigende Gerade als erste Annäherung vollständig begründet ist, d. h. dass die Regenmengen durch

$$s = a + b\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

darstellbar sind

Nach Formel 7 wurden sämmtliche Beobachtungen der Jahre 1864—1894 einer Untersuchung unterzogen, die zu folgenden Ergebnissen führte.

Tabelle A.

| Jahr | Zahl der Stationen $n$ | Grundwerthe: Grösse $a$ (mm) | Grundwerthe: Mittlerer Fehler $a$ (mm) ± | Höhenfaktoren für je 100 Meter: Grösse $b$ (mm) + | Höhenfaktoren für je 100 Meter: Mittlerer Fehler $\beta$ (mm) ± | Mittlerer Fehler der einzelnen Regenmengen $\mu$ (mm) ± | Verhältnisse der Zahlenwerthe zu einander und zu ihren mittleren Fehlern: $b:a$ + | $a:a$ ± | $\beta:b$ ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1864 | 18* | 338* | 38 | 50,6 | 8,1 | 82 | 0,150 | 0,113 | 0,16 |
| 1865 | 19 | 376 | 40 | 46,2 | 9,7 | 88 | 0,123 | 0,107 | 0,21 |
| 1866 | 20 | 446 | 51 | 61,9 | 11,2 | 119 | 0,139 | 0,114 | 0,18 |
| 1867 | 20 | 569 | 66* | 69,0 | 14,6* | 154* | 0,121 | 0,116* | 0,21 |
| 1868 | 20 | 469 | 41 | 43,4 | 9,0 | 94 | 0,093 | 0,087 | 0,21 |
| 1869 | 20 | 478 | 45 | 42,3 | 10,6 | 106 | 0,089 | 0,094 | 0,25 |
| 1870 | 21 | 464 | 43 | 66,4 | 10,4 | 106 | 0,143 | 0,094 | 0,16 |
| 1871 | 22 | 478 | 32 | 34,0 | 7,3 | 78 | 0,071 | 0,066 | 0,22 |
| 1872 | 22 | 485 | 42 | 39,2 | 9,5 | 103 | 0,081 | 0,086 | 0,24 |
| 1873 | 22 | 428 | 25* | 45,1 | 5,7* | 62* | 0,106 | 0,058 | 0,13 |
| 1874 | 22 | 375 | 38 | 44,0 | 8,7 | 94 | 0,117 | 0,101 | 0,20 |
| 1875 | 22 | 568 | 42 | 53,3 | 9,5 | 103 | 0,094 | 0,073 | 0,18 |
| 1876 | 22 | 472 | 41 | 44,0 | 9,4 | 102 | 0,093 | 0,087 | 0,22 |
| 1877 | 22 | 488 | 47 | 65,4 | 10,8 | 116 | 0,134 | 0,096 | 0,17 |
| 1878 | 22 | 396 | 34 | 85,0* | 7,9 | 85 | 0,217* | 0,087 | 0,09* |
| 1879 | 22 | 584 | 47 | 58,9 | 10,7 | 116 | 0,101 | 0,080 | 0,18 |
| 1880 | 22 | 609 | 43 | 58,8 | 9,8 | 106 | 0,097 | 0,071 | 0,17 |
| 1881 | 22 | 526 | 49 | 65,9 | 11,1 | 120 | 0,126 | 0,093 | 0,17 |
| 1882 | 22 | 738 | 38 | 52,5 | 8,8 | 95 | 0,071 | 0,052 | 0,17 |
| 1883 | 22 | 550 | 26 | 49,6 | 5,9 | 64 | 0,090 | 0,047* | 0,12 |
| 1884 | 21 | 590 | 52 | 61,4 | 11,6 | 124 | 0,104 | 0,088 | 0,19 |
| 1885 | 22 | 505 | 32 | 46,5 | 7,3 | 79 | 0,092 | 0,063 | 0,16 |
| 1886 | 21 | 640 | 33 | 28,5* | 7,3 | 76 | 0,045* | 0,051 | 0,26 |
| 1887 | 22 | 490 | 34 | 46,9 | 7,9 | 85 | 0,096 | 0,070 | 0,17 |
| 1888 | 22 | 505 | 36 | 65,1 | 8,1 | 88 | 0,129 | 0,071 | 0,12 |
| 1889 | 22 | 747* | 36 | 39,8 | 8,1 | 89 | 0,054 | 0,048 | 0,21 |
| 1890 | 21 | 584 | 29 | 62,2 | 6,5 | 70 | 0,107 | 0,049 | 0,11 |
| 1891 | 19 | 689 | 56 | 44,1 | 12,3 | 129 | 0,067 | 0,082 | 0,28* |
| 1892 | 19 | 370 | 29 | 53,7 | 6,3 | 68 | 0,145 | 0,077 | 0,12 |
| 1893 | 19 | 525 | 36 | 40,8 | 8,3 | 87 | 0,078 | 0,069 | 0,21 |
| 1894 | 19 | 634 | 45 | 64,0 | 11,3 | 104 | 0,101 | 0,072 | 0,18 |
| Mittel | | 520 | | 52,5 | | | 0,101 | | |

Die Tabelle A, in welcher die grössten Werthe der betreffenden Spalte mit zwei Sternen, die kleinsten mit einem Sterne bezeichnet sind, enthält eine Geschichte der Witterung in Sachsen während der letzten 31 Jahre. Der Hauptwerth derselben liegt darin, dass sie auf gleichmässigem Material begründet ist. Die 22 Stationen, deren Messungen verwendet wurden, sind: Annaberg, Bautzen, Chemnitz, Dresden-N., Döbeln, Elster, Freiberg, Gohrisch, Grillenburg, Georgengrün, Hubertusburg (Wermsdorf), Hinterhermsdorf, Königstein, Leipzig, Oberwiesenthal, Plauen, Rehefeld, Reitzenhain, Tharandt, Zwenkau, Zittau und Zwickau.

Hiervon fehlten:

1864: Döbeln, Tharandt, Gohrisch (bloss Januar) und Königstein.
1865: Döbeln, Tharandt, Oberwiesenthal (bloss Januar).
1866—1868: Döbeln, Tharandt.
1869: Döbeln, Georgengrün.
1870: Georgengrün.
1884: Tharandt.
1886: Gohrisch (bloss Januar).
1890: Zwickau.
1891: Zwickau, Königstein, Grillenburg.
1892: „ „ „
1893: „ „ Annaberg.
1894: „ „ Oberwiesenthal.

Es wurde eine Station auch dann weggelassen, wenn nur ein Monat fehlte, was bei den Forststationen meist mit Wechsel der Revierverwalter zusammenhing. Alle die neuen Kunststücke der Meteorologie: Mittelei, Pro- resp. Percenti-, Interpoli- und Homogenisirerei wurden unterlassen, da ich der Meinung bin, dass die durchsichtigen und jede Willkür ausschliessenden, auf den Lehren der Mathematik gegründeten Ausgleichungsrechenmethoden auch für die Meteorologie geschaffen wurden und ausreichen, es also nicht nöthig ist, erst besondere Methoden zu schaffen. Für die letzten Jahre wäre es mir leicht gewesen, an Stelle der weggefallenen Stationen Zwickau und Königstein ähnlich liegende einzustellen und die wenigen fehlenden Monate der anderen Stationen durch Interpolationen zu ersetzen.

Um zu sehen, wie genau die Darstellung der Regenverhältnisse durch nur 18—22 Stationen ist, wurden für die Jahre 1886—1893 die sämmtlichen Stationen zur Herleitung der Gleichungen $a + b\,h$ verwendet und wurden die nachstehenden Resultate Tabelle B erhalten. Die Kursivzahlen stellen die Abweichungen der Zahlen der zweiten Reihe von den entsprechenden der ersten dar.

Tabelle B.

| Jahr | Zahl der Stationen | Grundwerthe | | Höhenfaktoren für je 100 Meter | | Mittlere Fehler einer Regenmenge | Verhältnisse der Zahlenwerthe zu einander und zu ihren mittleren Fehlern. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Grösse | Mittlerer Fehler | Grösse | Mittlerer Fehler | | | | |
| | $n$ | $a$ (mm) | $\alpha$ (mm) | $b$ (mm) | $\beta$ (mm) | $\mu$ (mm) | $b:a$ | $\alpha:a$ | $\beta:b$ |
| 1886 | 141 | 616 | ± 15 | +35,9 | ± 3,5 | ± 85 | 0,059 | ± 0,025 | ± 0,10 |
| | | *+ 24* | *± 18* | *— 7,4* | *± 3,8* | *— 9* | *— 0,014* | *± 0,026* | *± 0,16* |
| 1887 | 144 | 485 | 12 | 42,3 | 2,9 | 71 | 0,087 | 0,025 | 0,07 |
| | | *+ 5* | *+ 22* | *+ 4,6* | *+ 5,0* | *+ 14* | *+ 0,009* | *+ 0,045* | *+ 0,10* |
| 1888 | 154 | 498 | 17 | 63,2 | 4,3 | 101 | 0,127 | 0,034 | 0,07 |
| | | *+ 7* | *+ 19* | *+ 1,9* | *+ 3,8* | *— 13* | *+ 0,002* | *+ 0,037* | *+ 0,05* |
| 1889 | 155 | 708 | 15 | 41,6 | 3,7 | 90 | 0,059 | 0,021 | 0,09 |
| | | *+ 39* | *+ 21* | *— 1,8* | *+ 4,4* | *— 1* | *— 0,005* | *+ 0,027* | *+ 0,12* |
| 1890 | 147 | 539 | 15 | 65,9 | 3,8 | 91 | 0,122 | 0,028 | 0,06 |
| | | *+ 45* | *+ 14* | *— 3,7* | *+ 2,7* | *— 21* | *— 0,015* | *+ 0,021* | *+ 0,05* |
| 1891 | 147 | 665 | 17 | 48,4 | 4,3 | 102 | 0,073 | 0,026 | 0,09 |
| | | *+ 24* | *+ 39* | *— 4,3* | *+ 8,0* | *+ 27* | *— 0,006* | *+ 0,056* | *+ 0,19* |
| 1892 | 137 | 382 | 14 | 50,7 | 3,4 | 84 | 0,133 | 0,037 | 0,07 |
| | | *— 12* | *+ 15* | *+ 3,0* | *+ 2,9* | *— 16* | *+ 0,012* | *+ 0,040* | *+ 0,05* |
| 1893 | 138 | 549 | 15 | 35,9 | 3,7 | 87 | 0,065 | 0,027 | 0,10 |
| | | *— 24* | *+ 21* | *+ 4,9* | *+ 4,6* | *0* | *+ 0,013* | *+ 0,012* | *+ 0,11* |
| | | 555 | | 48,0 | | | 0,086 | | |
| | | *— 35* | | *+ 4,5* | | | *+ 0,015* | | |

Die Gleichung $a + b\,h$ habe ich die klimatische Grundgleichung genannt, $a$ den Grundwerth und $b$ den Höhenfaktor. In den Tabellen A und B ist $b$ auf Hektometer als Einheit der Höhe bezogen, bedeutet also die Zunahme der Regenmenge für je 100 $m$ Höhe.

Die Grundwerthe würden die einem Orte von der Seehöhe 0 zugehörigen Regenmengen bedeuten.

Wie man aus Tabelle A sieht, ist das Mittel der $a$ 1864/94 (ohne Rücksicht auf die $\alpha$) $520 \pm 19\,mm$. Als Maximum erhielt man $747 \pm 36\,mm$ (1889) und als Minimum $338 \pm 38\,mm$ (1864). Die Zahl der Stationen ist von nur geringem Einfluss. Die $\alpha$ in Tabelle A zeigen keine Abhängigkeit von $n$. Dass bei Verwendung der 7fachen Zahl von Stationen die Genauigkeit der $a$ grösser ist, versteht sich von selbst. Theoretisch müssten die $\alpha$ in Tabelle A ungefähr das 2,5 fache der in Tabelle B sein und stimmt dies nahezu. Die 8 Werthe $a$ in Tabelle B geben als Durchschnitt 555 $mm$ und schwanken zwischen $382 \pm 14$ und $708 \pm 15\,mm$.

Als Thatsache kann daher gelten, dass der grösste Grundwerth den doppelten Werth des kleinsten erreichen, ersterer den Mittelwerth um 44 % desselben übersteigen, letzterer um 35 % darunter bleiben kann. Da extremere Jahre durchaus denkbar sind, werden die Extreme der $a$ um 50 % desselben vom normalen Werth verschieden sein können.

Die Reihe $\alpha : a$ giebt das Verhältniss der mittleren Fehler der $a$ zu diesen $a$ selbst. Durch Multiplikation mit 100 erhält man die $\alpha$ in Prozenten der $a$ und erkennt, dass bei Verwendung von circa 20 Stationen die $a$ bis auf 5—12 %, bei Verwendung von 140—150 Stationen aber bis auf circa 3 % genau erhalten werden.

Hinzuzufügen ist noch, dass die 27jährigen (1864—1890) Mittel der Regenmengen von 15 Stationen für den Grundwerth

$$a = 501 \pm 29\ mm$$

ergaben, wobei also der mittlere Fehler circa ± 6 % beträgt.

Der ohne Rücksicht auf die Gewichte der einzelnen Höhenfaktoren $b$ aus Tabelle A gebildete Mittelwerth derselben beträgt $52{,}5 \pm 2{,}2\,mm$ für je 100 $m$ Höhe. Die Einzelwerthe liegen zwischen $28{,}5 \pm 7{,}3$ (1886) und $85{,}0 \pm 7{,}9$ (1878).

Tabelle B ergab als durchschnittlichen Werth von $b$ 48,0 $mm$, die Einzelwerthe schwanken zwischen $65{,}9 \pm 3{,}8$ (1890) und $35{,}9 \pm 3{,}6$ (1886 und 1893).

Aus der Reihe $\beta : b$ in Tabelle A ersieht man, dass circa 20 Stationen den Faktor $b$ bis auf 9—28 % genau ergeben, während bei Verwendung von circa 140—150 Stationen dieser Fehler nur auf 6—10 % sich stellt.

Die Spalte $b : a$ giebt Auskunft über das Verhältniss des Höhenfaktors zum Grundwerth. Die Mittelwerthe von $a$ und $b$ liefern bei Tabelle A $b : a = 0{,}101$, bei Tabelle B 0,086. Es wird also die Zunahme der Regenmengen für je 100 $m$ Höhenzunahme 9—10 % der Mengen im Meeresniveau betragen. Aber dieses Verhältniss unterliegt bedeutenden Schwankungen. 1878 war $b : a = 0{,}217$ als Maximalwerth, 1886 nur 0,045 als Minimalwerth. Daraus geht hervor, dass die Höhenfaktoren nicht proportional den Grundwerthen sein können, sonst müsste $b : a$ wenigstens nahezu konstant sein. Dagegen könnten

die $b$ den $a$ umgekehrt proportional sein, so dass in Jahren, wo die Niederungen Trockenheit haben, die Zunahme der Regenmengen mit der Höhe grösser sein würde als in nassen Jahren. Bei einfacher Durchsicht der Tabelle tritt dies jedoch nicht hervor und würde also erst näher zu untersuchen sein. Bemerkenswerth ist allerdings, dass das absolute Maximum von $a$ (1889) $b : a = 0{,}054$ ergab, also einen kleinen Werth, während der Maximalwerth $b : a = 0{,}217$ im Jahre 1878 zu einem der kleinsten $a = 396\ mm$ gehörte. Aber 1892 war $a = 370\ mm$, dagegen $b : a = 0{,}145$, und 1864 $a = 338$, $b : a = 0{,}150$, so dass also ein so einfaches Verhältniss nicht als Grösse erster Ordnung bestehen dürfte.

Betrachtet man die Reihen der $\mu$, so zeigt sich, dass die Darstellung der Regenmengen nach der Formel $a + b\,h$ eben nur als eine **erste** Annäherung gelten kann. Der mittlere Fehler der einzelnen Regenmengen kann eine Grösse von fast dem dreifachen Werth des Höhenfaktors erreichen, was also sagt, dass andere Einflüsse als die Höhenlage Abweichungen bedingen, die denen von $\pm$ 300 $m$ Höhendifferenz gleichkommen, falls das Gesetz von der Proportionalität der Zunahme der Regenmengen mit der der Höhe physikalisch begründet sein sollte.

Einen Vorstoss zur Klärung dieser Frage hat Albrecht Riggenbach*) gemacht. Es stellt die zehnjährigen Mittel (1883—92) der Regenmenge von 16 Stationen nach der Formel

$$s = a + b\,(h - 300) + c\,\mathrm{tg}\,z \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dar und findet

$$a = 703 \pm 21^{**})\ mm$$
$$b = 41{,}4 \pm 7{,}5$$
$$c = 381{,}6 \pm 96{,}6$$
$$\mu = \pm 25$$

Die Darstellung der 27 jährigen Mittel (1864—1890) der Regenmenge von 15 Stationen in Sachsen nach der Formel $a + b\,h$ hatte ergeben

$$a = 501 \pm 29\ mm$$
$$b = 53{,}7 \pm 5{,}8$$
$$\mu = \pm 55$$

Daraus ist zu ersehen, dass die Zahlenwerthe der Grundgleichung in beiden Fällen nahezu gleiche Genauigkeit haben, aber die Formel Riggenbach's die mittleren Fehler der Einzelwerthe wesentlich kleiner erscheinen lässt.

Der Werth $z$, dessen Tangente im letzten Glied von Formel 8 erscheint, wird von Herrn Riggenbach als mittlerer Böschungswinkel des Terrains definirt.

Wenn nun auch diese Definition bedenklich und unbestimmt ist, ausserdem ich der theoretischen Ableitung der Formel durch Herrn Riggenbach nicht beistimmen kann und diese selbst innere Widersprüche enthält, so ist der Vorgang jedenfalls interessant und wichtig.

Der innere Widerspruch ist der, dass nach Formel 8 Stationen mit starker Neigung des Terrains grössere Regenmengen haben müssen, gleichgültig nach welcher Richtung hin das Terrain geneigt ist, als die auf weniger geneigtem Terrain in gleicher Höhe liegenden Stationen. Das ist aber durchaus nicht der Fall.

Der Abfall des Erzgebirges ist entschieden nach der Eger zu steiler als auf der sächsischen Seite. Dr. Hoppe hat aber gefunden, dass die Regenmengen sich auf den beiden Seiten derart gestalten, dass in gleicher Höhe der Südabhang eine kleinere Menge hat als der Nordabhang. Die Zahlen Dr. Hoppe's*) sind folgende:

| Höhe | sächsische Seite | böhmische Seite | Differenz |
|---|---|---|---|
| 300 $m$ | 703 $mm$ | 556 $mm$ | 147 $mm$ |
| 500 „ | 799 „ | 655 „ | 144 „ |
| 700 „ | 880 „ | 753 „ | 127 „ |
| 900 „ | 985 „ | 869 „ | 116 „ |

Der Unterschied wird wohl von der Lage des Terrains gegen die **vorherrschende** Windrichtung bedingt sein. Diese kann man vielleicht folgendermaassen in Rechnung bringen. Ist $z$ der Maximalwinkel der Böschung, $\varphi$ der Winkel zwischen der Vertikalebene durch die Richtung derselben mit der vorherrschenden Windrichtung, so würde der Ausdruck

$$\mathrm{tg}\,z \cdot \cos\varphi$$

bei $\varphi = 0$ den Maximaleinfluss der Neigung, bei $\varphi = \pm 90$ die Einflusslosigkeit und bei $\varphi = 180^0$ den Windschatten zum Ausdruck bringen, und man würde also die Formel 8 einfach in

$$s = a + b\,h + c\,\mathrm{tg}\,z\,\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zu verwandeln haben.

Nimmt man an, dass die Niederschlagsmengen durch eine der Formeln 7 bis 9 darstellbar sind, wobei also Formel 9 als die allgemeine, die beiden anderen als Spezialformeln zu betrachten sein werden, so wird man an der Hand derselben das Hann'sche Gesetz auf seine theoretische Berechtigung prüfen können.

Sind $s_1$ und $s_2$ die Regenmengen zweier Stationen, $h_1$ und $h_2$ deren Seehöhen, $z_1$ und $z_2$ die Böschungswinkel, $\varphi_1$ und $\varphi_2$ deren Azimuthe, so ist nach Formel 9

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= a + b\,h_1 + c\,\mathrm{tg}\,z_1\,\cos\varphi_1 \\ s_2 &= a + b\,h_2 + c\,\mathrm{tg}\,z_2\,\cos\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

und man findet für das Verhältniss beider

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1 + q h_1 + p\,\mathrm{tg}\,z_1\,\cos\varphi_1}{1 + q h_2 + p\,\mathrm{tg}\,z_2\,\cos\varphi_2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hierin wurde gesetzt

$$q = \frac{b}{a} \qquad p = \frac{c}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Da die Höhen und die Grösse der Böschungen für beide Stationen konstant sind, wird die von Herrn Hann behauptete Konstanz des Verhältnisses $s_1 : s_2$ von Jahr zu Jahr nur bestehen können, wenn $q$ und $p$ von Jahr zu Jahr unverändert bleiben, aber auch die vorherrschende Windrichtung keine wesent-

*) Die Niederschlagsverhältnisse des Kantons Basel und ihre Beziehung zur Bodengestalt. — Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel, Bd X, Heft 2.

**) Herr Riggenbach giebt die wahrscheinlichen Fehler an, es wurden dieselben nach der Annahme $\mu = \frac{3}{2} r$ in mittlere Fehler verwandelt.

*) Das Klima des Erzgebirges. Von Dr. H. Hoppe. Separatabdruck aus dem Jahrbuch 1889 des Erzgebirgszweigvereins Chemnitz, Seite 37.

liche Schwankung zeigt. Zu allen diesen Voraussetzungen fehlt jeder triftige Grund. Thatsache ist unbestritten, dass die $a$ Schwankungen um mehr als 100 % des kleinsten Werthes haben, und ebenso unbestritten ist die Verschiedenheit der vorherrschenden Winde in den einzelnen Jahren.

Aus ersterer Thatsache ergiebt sich ohne Weiteres, das $p$ und $q$ nicht konstant sein können. Es könnte dies eben nur der Fall sein, wenn $b$ und $c$ sich proportional mit $a$ ändern, wozu theoretisch kein Grund zu finden sein dürfte und was sich aus den Tabellen A und B in keiner Weise ableiten liess. Für den grössten Theil Sachsens wird man das dritte Glied der Formel 9 als klein vernachlässigen können und erhält dann als das Verhältniss der Regenmenge irgend einer Station in der Höhe $h$ zu der für die Seehöhe 0 geltenden die Gleichung

$$\sigma = s : s_0 = 1 + q\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

woraus ohne Weiters

$$d\,\sigma = h\,d\,q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

folgt.

Man findet weiter aus 12

$$dq = q\left(-\frac{d\,a}{a} + \frac{d\,b}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Tabelle A zeigt für $q$ den durchschnittlichen Werth 0,1, als kleinsten 0,045 und als grössten 0,217, es werden daher als Durchschnitte und Extreme für $\sigma$ sich folgende Zahlen ergeben:

| Höhe | Mittel | Max. | Min. | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| $h =$ 100 $m$ | $\sigma =$ 1,1 | 1,22 | 1,05 | 0,17 oder 15 % |
| $h =$ 500 $m$ | $\sigma =$ 1,5 | 2,09 | 1,23 | 0,86 „ 57 „ |
| $h =$ 1000 $m$ | $\sigma =$ 2,0 | 3,17 | 1,45 | 1,72 „ 86 „ |

Die Schwankungen in den $\sigma$ nehmen also nicht nur absolut, sondern auch prozentisch mit der Höhe stark zu. In den Niederungen betragen sie 15 % des durchschnittlichen Werthes für diese Höhen, in diesen grössten Höhen aber 86 % des wesentlich grösseren durchschnittlichen $\sigma$ für das Gebirge.

Allerdings haften an den $b$ und $a$ beträchtliche Unsicherheiten. Den Maximal-Einfluss derselben kann man ungefähr in Rechnung bringen, wenn man die Formel 15

$$da = \mp\,\alpha \qquad db = \pm\,\beta$$

setzt, was alsdann

$$dq = \pm\,q\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right)$$

ergiebt.

Die Werthe $\alpha : a$ und $\beta : b$ sind in Tabelle A aufgeführt. Nimmt man deren Maximalwerthe 0,116 resp. 0,280, so wird $(\alpha : a + \beta : b) = 0{,}4$ und so ergiebt sich als äussersten Werth von $dq$

$$dq = \pm\,0{,}4\,q.$$

Setzt man diesen Werth in 14 ein und berücksichtigt 13, so erhält man

$$d\,\sigma = \pm\,0{,}4\,(\sigma - 1).$$

Wenn man weiter annimmt, dass die Maximalwerthe der $\sigma$ in der vorstehenden Tabelle um den Maximalfehler zu gross, die Minimalwerthe zu klein gefunden wurden, so würden diese sich folgendermaassen ergeben haben:

| Höhe | Mittel | Max. | Min. | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| $h =$ 100 $m$ | $\sigma =$ 1,1 | 1,18 | 1,09 | 0,09 oder 8 % |
| $h =$ 500 $m$ | $\sigma =$ 1,5 | 1,89 | 1,43 | 0,46 „ 31 „ |
| $h =$ 1000 $m$ | $\sigma =$ 2,0 | 2,77 | 1,85 | 0,92 „ 46 „ |

Diese Schwankungen werden als Minimalwerthe unter allen Umständen thatsächlich bestehen und wird das Hann'sche Gesetz also nur innerhalb dieser Fehlergrenzen im günstigsten Fall gelten, wahrscheinlich aber noch wesentlich unrichtiger sein.

Für die Extreme der $q$ in Tabelle A fanden wir

$q = 0{,}217$ $a : a = \pm\,0{,}087$ $\beta : b = 0{,}09$ $d\,q = \pm\,0{,}18$ $q = \pm\,0{,}039$
$0{,}045$ $0{,}051$ $0{,}26$ $\pm\,0{,}31$ $q = \pm\,0{,}014$

Wird also wieder der ungünstigste Fall angenommen, dass das grösste $q$ um das zugehörige $dq$ zu gross, das kleinste zu klein ausgefallen ist, so würden doch noch die Schwankungen von 0,06 bis 0,18 bestehen bleiben und würden die $\sigma$ zwischen $1 + 0{,}06\,h$ und $1 + 0{,}18\,h$ liegen, also für

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 $m$ | zwischen | 1,06 | und 1,18 |
| 500 „ | „ | 1,30 | „ 1,90 |
| 1000 „ | „ | 1,60 | „ 2,80. |

Das Resultat wird also sein, dass das Hann'sche Gesetz auch in einem kleinen Bezirk bei einigermaassen grossen Höhenunterschieden nicht gültig ist.

Noch auf andere Weise müssen wir die Sache untersuchen. Sind

$$\left.\begin{array}{ll} a_1\ a_2 \ldots a_n, & A = [a] : n \\ b_1\ b_2 \ldots b_n, & B = [b] : n \\ m_1\ m_2 \ldots m_n, & M = [m] : n \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Jahressummen in $n$ Jahren von $m$ Stationen und $A$, $B$, $M$ die Mittel aus den $n$ Einzelwerthen einer jeden Station, so soll nach dem Hann'schen Gesetz

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots \frac{a_n}{b_n} = \sigma_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2} = \ldots \frac{a_n}{m_n} = \sigma_m \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

sein.

Es wird also auch

$$\begin{array}{l} a_1 = b_1\,\sigma_1 \ldots a_1 = m_1\,\sigma_m \\ a_2 = b_2\,\sigma_1 \ldots a_2 = m_2\,\sigma_m \\ \ldots \\ a_n = b_n\,\sigma_1 \ldots a_n = m_n\,\sigma_m \\ [a] = [b]\,\sigma_1 \ldots [a] = [m]\,\sigma_m \end{array}$$

sein und folgt hieraus

$$\sigma_1 = \frac{[a]}{[b]} = \frac{nA}{nB} = \frac{A}{B}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_m = \frac{[a]}{[m]} = \frac{nA}{nM} = \frac{A}{M}$$

Man wird also unter den in 16 gemachten Annahmen*) und nur unter dieser Bedingung weiter erhalten

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n : A = b_1 : b_2 : \ldots : b_n : B = \ldots\ldots$$
$$= m_1 : m_2 : \ldots : m_n : M$$

oder

*) Man vergleiche hiermit die Rechnung des Herrn Brückner auf Spalte 7.

$$100\frac{a_1}{A} = 100\frac{b_1}{B} = \ldots = 100\frac{m_1}{M} = r_1$$
$$100\frac{a_2}{A} = 100\frac{b_2}{B} = \ldots = 100\frac{m_2}{M} = r_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$100\frac{a_n}{A} = 100\frac{b_n}{B} = \ldots = 100\frac{m_n}{M} = r_n$$

worin also die $r$ die Brückner'schen relativen Regenmengen in Prozenten der Mittel aus $n$ Jahren bedeuten.

Die $r$ werden von Jahr zu Jahr sich ändern, aber in einem Jahre wird:

Die relative Regenmenge für alle Stationen ein und denselben Werth auf der ganzen Erdoberfläche haben müssen, wenn das Hann'sche Gesetz unbegrenzt richtig ist und die Bedingungen unter 16 erfüllt sind.

Das müsste aus den Tabellen mit Bestimmtheit hervortreten, die in dem mehrfach erwähnten Werk des Herrn Brückner (S. 156—164) sich vorfinden und von denen ich einige Angaben auf Spalte 7 und 8 aufgeführt habe; es müsste dies um so mehr sein, als Herr Brückner nicht Jahresmengen, sondern Lustrenmittel giebt. Ich habe schon an der obigen Stelle darauf hingewiesen, dass die relativen Regenmengen in einem Lustrum so verschieden sind, als man sich dies nur wünschen kann, so dass — wenigstens nach meinem Urtheil — dadurch die Ungültigkeit des Hann'schen Gesetzes nachgewiesen ist.

Das tritt noch mehr aus folgender Erwägung hervor.

Wenn $r$ — die relative Regenmenge — definirt ist durch

$$r = 100\frac{s}{S}$$

und man setzt

$$s + \Delta = S,$$

worin $\Delta$ die Abweichung des Jahresmittels vom vieljährigen Mittel bedeutet, so ist

$$r = 100\left(1 - \frac{\Delta}{S}\right).$$

Soll also $r$ über die ganze Erde in einem Jahr konstant sein, so müsste das Gesetz existiren, dass die Schwankungen des Regenfalles $\Delta$ an einem Ort um so grösser sein müssen, je grösser der Regenreichthum ($S$) derselben durchschnittlich ist.

Herr Brückner leitet aus seinem eigenen Material aber genau das Gegentheil ab, er zeigt, dass mit der Kontinentalität die Regenmengen selbst kleiner, deren Schwankungen aber grösser werden.

Hierdurch weist er selbst nach, dass das Gesetz, auf das sich seine ganze Rechnung gründet, falsch ist.

## Abschnitt III.

### Die Kriterien der zufälligen Witterungsfolge.

Wenn uns eine Reihe von Regenmengen einer Station aus $n$ Jahren gegeben ist, so können wir in der Folge der einzelnen Werthe entweder eine gewisse Gesetzmässigkeit, also eine regelmässige periodische Schwankung oder die Aenderung nach irgend einem anderen Gesetz vermuthen, oder wir können annehmen, dass die Reihenfolge eine rein zufällige sei.

Man wird jedenfalls die Untersuchung mit der letzteren Annahme beginnen müssen.

Hierüber existiren bestimmte Vorschriften, welche — soweit ich hierin unterrichtet zu sein glaube — mit grosser Vollständigkeit in dem I. Bande der „Physikalischen Maassbestimmungen von Dr. Weinstein“ zusammengestellt sind. An der Hand dieser Vorschriften wurden nachstehende Untersuchungen vorgenommen.

Um den Unterschied zwischen einer gegebenen Reihe, deren Natur zu erörtern, und einer solchen, deren rein periodische Natur zweifellos ist, hervortreten zu lassen, stelle ich hier die 67 Regenmengen (1828—1894) von Dresden mit denen zusammen, welche nach der Formel

$$s = 700 + 100\cos 36x + 100\sin 10x - 100\cos 3x$$

berechnet worden sind. Was es mit dieser Formel für eine Bewandtniss hat, wird sich in den folgenden Abschnitten zeigen.

| Jahr | Jahresmengen $s$ in Dresden | | | | Theoretische Mengen | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $s$ | $v$ | $\delta$ | $\tau$ | $s$ | $v$ | $\delta$ | $\tau$ |
| 1828 | 865 | +268 | (−168) | +126 | 800 | +160 | (− 63) | |
| 1829 | 455 | −142 $w$ | +41 | +106 | 758 | +118 | +42 | +42 |
| 1830 | 561 | − 36 | −106 $w$ | + 35 | 686 | + 46 | +72 | +74 |
| 1831 | 596 | − 1 | − 35 | −298 $w$ | 604 | − 36 $w$ | +82 | +10 |
| 1832 | 298 | −299 | +298 $w$ | +291 $w$ | 534 | −106 | +70 | −70 $w$ |
| 1833 | 589 | − 8 | −291 $w$ | − 11 $w$ | 498 | −142 | +36 | −36 |
| 1834 | 616 | + 19 $w$ | − 27 | −151 | 502 | −138 | − 4 $w$ | + 4 $w$ |
| 1835 | 427 | −170 $w$ | +189 $w$ | + 36 $w$ | 539 | −101 | −37 | +37 |
| 1836 | 463 | −134 | − 36 $w$ | + 66 | 592 | − 48 | −53 | +53 |
| 1837 | 529 | − 68 | − 66 | − 6 $w$ | 636 | − 4 | −44 | +44 |
| 1838 | 523 | − 74 | + 6 $w$ | − 26 | 652 | + 12 $w$ | −16 | − 8 $w$ |
| 1839 | 697 | +100 $w$ | −174 $w$ | + 26 $w$ | 632 | − 8 $w$ | +20 $w$ | + 4 $w$ |
| 1840 | 523 | − 74 $w$ | +174 $w$ | − 6 $w$ | 586 | − 54 | +46 | −46 $w$ |
| 1841 | 677 | + 80 $w$ | −154 $w$ | −161 | 530 | −110 | +56 | −56 |
| 1842 | 356 | −241 $w$ | +321 $w$ | +213 $w$ | 488 | −152 | +42 | −42 |
| 1843 | 625 | + 28 $w$ | −269 $w$ | − 72 $w$ | 479 | −161 | + 9 | − 9 |
| 1844 | 497 | −100 $w$ | +128 $w$ | − 3 | 511 | −129 | −32 $w$ | +32 $w$ |
| 1845 | 700 | +103 $w$ | −203 $w$ | + 93 $w$ | 574 | − 66 | −63 | +63 |
| 1846 | 607 | + 10 | + 93 $w$ | − 53 $w$ | 650 | + 10 $w$ | −76 | +56 |
| 1847 | 534 | − 63 $w$ | + 73 | + 4 $w$ | 714 | + 74 | −64 | −64 $w$ |
| 1848 | 538 | − 59 | − 4 $w$ | + 5 | 748 | +108 | −34 | −34 |
| 1849 | 651 | + 54 $w$ | −113 | + 52 | 742 | +102 | + 6 $w$ | + 6 $w$ |
| 1850 | 599 | + 2 | + 52 $w$ | − 34 $w$ | 704 | + 64 | +38 | +38 |
| 1851 | 633 | + 36 | − 34 $w$ | + 2 $w$ | 652 | + 12 | +52 | +52 |
| 1852 | 563 | − 34 $w$ | + 70 $w$ | + 25 | 611 | − 29 $w$ | +41 | −17 $w$ |
| 1853 | 606 | + 9 $w$ | − 43 $w$ | −204 $w$ | 597 | − 43 | +14 | −14 |
| 1854 | 810 | +213 | −204 | +185 $w$ | 620 | − 20 | − 23 $w$ | +23 $w$ |
| 1855 | 569 | − 28 $w$ | +241 $w$ | + 20 | 670 | + 30 $w$ | −50 | −10 $w$ |
| 1856 | 605 | + 8 $w$ | − 36 $w$ | − 78 $w$ | 730 | + 90 | −60 | −60 |
| 1857 | 511 | − 86 $w$ | + 94 $w$ | − 30 | 775 | +135 | −45 | −45 |
| 1858 | 713 | +116 $w$ | −202 $w$ | + 58 $w$ | 787 | +147 | −12 | −12 |
| 1859 | 539 | − 58 $w$ | +174 $w$ | − 54 $w$ | 758 | +118 | +29 $w$ | +29 $w$ |
| 1860 | 709 | +112 $w$ | −170 $w$ | + 57 $w$ | 696 | + 56 | +62 | +62 |
| 1861 | 652 | + 55 | + 57 $w$ | + 45 | 620 | − 20 $w$ | +76 | +36 |
| 1862 | 587 | − 10 $w$ | + 65 | − 86 $w$ | 556 | − 84 | +64 | −64 $w$ |
| 1863 | 693 | + 96 $w$ | −106 $w$ | −108 | 521 | −119 | +35 | −35 |
| 1864 | 393 | −204 $w$ | +300 $w$ | +127 $w$ | 524 | −116 | − 3 $w$ | + 3 $w$ |
| 1865 | 520 | − 77 | −127 $w$ | + 50 | 558 | − 82 | −34 | +24 |
| 1866 | 570 | − 27 | − 50 | −185 $w$ | 605 | − 35 | −47 | +47 |
| 1867 | 809 | +212 $w$ | −239 | +177 $w$ | 642 | + 2 $w$ | −37 | +33 |
| 1868 | 562 | − 35 $w$ | +247 $w$ | − 10 $w$ | 649 | + 9 | − 7 | − 7 $w$ |
| 1869 | 552 | − 45 | + 10 | − 2 | 620 | − 20 $w$ | +29 $w$ | −11 |
| 1870 | 644 | + 47 $w$ | − 92 $w$ | − 36 | 563 | − 77 | +57 | −57 |
| 1871 | 514 | − 83 $w$ | +130 $w$ | + 54 $w$ | 497 | −143 | +66 | −66 |
| 1872 | 568 | − 29 | − 54 $w$ | − 95 $w$ | 446 | −194 | +51 | −51 |

| Jahr | Jahresmengen $s$ in Dresden | | | | Theoretische Mengen | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $s$ | $v$ | $\delta$ | $\tau$ | $s$ | $v$ | $\delta$ | $\tau$ |
| 1873 | 473 | −124 | + 95 $w$ | | 429 | −211 | +17 | −17 |
| 1874 | 451 | −146 | + 22 | − 22 | 454 | −186 | −25 $w$ | +25 $w$ |
| 1875 | 610 | + 13 $w$ | −159 $w$ | +133 $w$ | 512 | −128 | −58 | +58 |
| 1876 | 538 | − 59 $w$ | + 72 $w$ | − 46 $w$ | 586 | − 54 | −74 | +74 |
| 1877 | 610 | + 13 $w$ | − 72 $w$ | + 46 $w$ | 650 | + 10 $w$ | −64 | +44 |
| 1878 | 505 | − 92 $w$ | +105 $w$ | − 79 $w$ | 686 | + 46 | −36 | −36 $w$ |
| 1879 | 630 | + 33 $w$ | −125 $w$ | + 59 $w$ | 686 | + 46 | − 0 | − 0 |
| 1880 | 600 | + 3 | + 30 $w$ | + 30 | 656 | + 16 | +30 $w$ | +30 $w$ |
| 1881 | 588 | − 9 $w$ | + 12 | − 6 $w$ | 616 | − 24 $w$ | +40 | − 8 $w$ |
| 1882 | 738 | +141 $w$ | −150 $w$ | −132 | 588 | − 52 | +28 | −28 |
| 1883 | 539 | − 58 $w$ | +199 $w$ | + 83 $w$ | 592 | − 48 | − 4 $w$ | + 4 $w$ |
| 1884 | 644 | + 47 $w$ | −105 $w$ | + 11 | 633 | − 7 | −41 | +41 |
| 1885 | 551 | − 46 $w$ | + 93 $w$ | + 1 | 704 | + 64 $w$ | −71 | −57 $w$ |
| 1886 | 758 | +161 $w$ | −207 $w$ | −115 $w$ | 785 | +145 | −81 | −81 |
| 1887 | 493 | −104 $w$ | +265 $w$ | + 57 $w$ | 852 | +212 | −67 | −67 |
| 1888 | 598 | + 1 $w$ | −105 $w$ | +103 | 887 | +247 | −35 | −35 |
| 1889 | 859 | +262 | −261 | −261 $w$ | 880 | +240 | + 7 $w$ | + 7 $w$ |
| 1890 | 725 | +128 | +134 $w$ | +134 $w$ | 840 | +200 | +40 | +40 |
| 1891 | 876 | +279 | −151 $w$ | −151 $w$ | 785 | +145 | +55 | +55 |
| 1892 | 524 | − 73 $w$ | +352 $w$ | +206 $w$ | 873 | + 98 | +47 | +47 |
| 1893 | 625 | + 28 $w$ | −101 $w$ | + 45 | 072 | + 80 | +18 | +18 |
| 1894 | 797 | +200 | −172 | −172 $w$ | 773 | + 97 | −17 $w$ | −17 $w$ |
| Summen | 59980 | +2877 | +4511 | | 42872 | +2939 | +1377 | |
| | | −2896 | −4511 | | | −2947 | −1377 | |
| $n$ 67 | | − 19 | 0 | | | − 8 | 0 | |
| | | ±5773 | ±9022 | | | ±5886 | ±2754 | |
| Mittel | 596,7 | | | | 639,9 | | | |
| Quadratsummen | $[vv]=879589$ | | $[\delta\delta]=1790579$ | | $[vv]=783286$ | | $[\delta\delta]=145160$ | |

Sortirung der Fehler $v$.

| Fehler $s$ in Dresden | | | | Fehler der theoretischen Mengen | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | − | + | − | + | − | + | − |
| 1 | | | 68 | 2 | | | 82 |
| | 1 | | 73 | | 4 | | 84 |
| 2 | | | 74 | | 7 | 90 | |
| 3 | | | 74 | | 8 | 97 | |
| 8 | | | 77 | 9 | | 98 | |
| | 8 | 80 | | 10 | | | 101 |
| 9 | | | 83 | 10 | | 102 | |
| | 9 | | 86 | 12 | | | 106 |
| 10 | | | 92 | 12 | | 108 | |
| | 10 | 96 | | 16 | | | 110 |
| 13 | | 100 | | | 20 | | 116 |
| 13 | | | 100 | | 20 | 118 | |
| 19 | | 103 | | | 20 | 118 | |
| | 27 | | 104 | | 24 | | 119 |
| 28 | | 112 | | | 29 | | 128 |
| 28 | | 116 | | 30 | | | 129 |
| | 28 | | 124 | | 35 | 135 | |
| | 29 | 128 | | | 36 | | 138 |
| 33 | | | 134 | | 43 | | 142 |
| | 34 | 141 | | 46 | | | 143 |
| | 35 | | 142 | 46 | | 145 | |
| 36 | | | 146 | 46 | | 145 | |
| | 36 | 161 | | | 48 | 147 | |
| | 45 | | 170 | | 48 | | 152 |
| | 46 | 200 | | | 52 | 160 | |
| 47 | | | 204 | | 54 | | 161 |
| 47 | | 212 | | | 54 | | 186 |
| 54 | | 213 | | 56 | | | 194 |
| 55 | | | 241 | 64 | | 200 | |
| | 58 | 262 | | 64 | | | 211 |
| | 58 | 268 | | | 66 | 212 | |
| | 59 | 279 | | 74 | | 240 | |
| | 59 | | 299 | | 77 | 247 | |
| | 63 | | | 80 | | | |

Die vorstehenden Tabellen enthalten die Grundlagen für die Beurtheilung der Zufälligkeit in der Folge der einzelnen Regenmengen.

Auf gleiche Weise wurden behandelt die Messungen in Freiberg (1831—1894) und Meissen (1855—1894).

Weiter nahm ich hinzu die „Grundwerthe“ $a$ der Gleichungen $(a+b\,h)$, die Höhenfaktoren $b$ derselben und die aus ihnen berechneten Regenmengen für 1000 Meter Höhe.

Um die Berechtigung des Verwerfens der Beobachtungen in Deutschbrod durch Herrn Brückner*) zu prüfen, wurden auch die in dem 81. Bande S. 60 der Wiener Sitzungsberichte von Hann gegebenen Regenmengen (1849—1871) dieser Station herangezogen. Die Seehöhe von Deutschbrod ist 425 $m$. Es ist bemerkenswerth, dass dasselbe nach der Karte ungefähr dieselbe Lage zu dem Gebirgszuge der Böhmisch-Mährischen Höhe zu haben scheint, als Freiberg zum Erzgebirge.

Besonders interessant erscheinen die Pariser Beobachtungen, welche 1688 begannen und somit eine mehr als zweihundertjährige Reihe geben würden, wenn nicht einige Lücken vorhanden wären. Den Beobachtungen in Paris wird Unhomogenität vorgeworfen. Nach Herrn E. Renou**) wurden sie durch den Wunsch angeregt, zu wissen, welche Regenmengen zum Füllen der Bassins in Versailles vorhanden wären.

Die diesbezüglichen Vorrichtungen wurden unter de la Hire auf der Sternwarte in Paris hergestellt.

Es ist mir nicht möglich geworden, weder aus den Beschreibungen Renou's, noch aus den Darstellungen im „Annuaire météorologique et agricole de l'observatoire de Montsouris“ ein klares Bild über diese Einrichtungen zu erhalten. Der älteste Regenmesser scheint ein quadratischer Kasten von 2 Fuss Seitenlänge und $^1/_2$ Fuss Höhe (Renou) gewesen zu sein, von dem das Wasser durch ein circa 20 Meter langes Bleirohr in das Messgefäss lief. Herr Renou behauptet, dass die Aufstellung ungünstig gewesen sei, Richtung und Stärke des Windes hätten grossen Einfluss haben müssen, durch das lange Rohr wären kleinere Mengen verloren gegangen u. s. w.

Herr Renou giebt weiter an, dass die Messungen nur am Ende eines jeden Monats stattgefunden hätten. Als die Regenmengen immer kleiner und kleiner wurden, schrieb man dies der Mangelhaftigkeit des Instrumentes zu und fand es 1755 bequemer, die Beobachtungen einzustellen, anstatt einen besseren Apparat zu konstruiren.

Im Jahre 1773, nach 18jähriger Unterbrechung, begann eine neue Beobachtungsreihe, welche bis 1797 fortgeführt wurde.

Herr Renou behauptet, dass diese Beobachtungen mit einem abgeänderten Regenmesser vorgenommen wurden, während im Jahrbuch von Montsouris ausdrücklich erwähnt ist, dass bis 1803 die Einrichtung unverändert geblieben sei. In diesem Jahr wurde das Auffangegefäss auf der Terrasse der Sternwarte (placé sur le haut de l'Observatoire,

*) Vergl. Abschnitt I, Spalte 6.

**) Études sur le climat de Paris par M. E. Renou II. La Pluie depuis 1688. — Annales du Bureau Central Météorologique de France, I. Theil, 1885.

à 28 mètres au-dessus du sol de la cour d'entrée) aufgestellt, das Regenwasser aber ebenfalls durch ein circa 20 *m* langes Rohr nach der Messvorrichtung geführt. Diese von Herrn Renou ebenfalls als ungenügend bezeichnete Einrichtung soll heute noch bestehen.

1817 begannen Vergleichsbeobachtungen an einem im Hof der Sternwarte aufgestellten Apparat, deren Werth aber durch das Anpflanzen von Pappeln durch Leverrier beeinträchtigt wurde. Von 1873 an beginnen die Beobachtungen im Garten des Observatoriums zu Montsouris. Ich habe aus den in vorstehender Uebersicht enthaltenen Gründen die Pariser Beobachtungen, wie sie im Annuaire Montsouris enthalten sind, in 4 Reihen: 1689—1754 (es fehlen 1697 und 1698 ?), 1773—1797, 1804—1872 und 1873—1894 getheilt. Die Regenmenge für 1894 verdanke ich der freundlichen brieflichen Mittheilung des Herrn L. Decroix, bisherigen Abtheilungsvorstandes des Montsourisobservatoriums.

**Nunmehr können wir an die Besprechung der Kriterien gehen, welche zeigen sollen, ob die Reihenfolge der Regenmengen der einzelnen Jahre als eine zufällige anzusehen ist, oder ob darin eine Gesetzmässigkeit vermuthet werden kann.**

### *A)* Die absoluten Schwankungen der Regenmengen.

Ich stelle zunächst die mittleren Regenmengen und deren mittlere Fehler mit den in den einzelnen Reihen beobachteten absoluten Extremen zusammen.

| Station | Zeitraum: Jahr von | Zeitraum: Jahr bis | Zahl der Jahre | Mittel aus allen Beobachtungen: Werth | Mittel aus allen Beobachtungen: Mittlerer Fehler | Abweichungen vom Mittel: Extreme max. | Abweichungen vom Mittel: Extreme min. | Differenz der Extreme |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge | | | 67 | 640 | ± 13 *mm* | + 247 | — 211 | 458 |
| Dresden . . . | 1828 | 1894 | 67 | 597 | 14 | 279 | 299 | 578 |
| Freiberg . . . | 1831 | „ | 64 | 666 | 17 | 350 | 265 | 615 |
| Meissen . . . | 1855 | „ | 40 | 581 | 22 | 252 | 204 | 456 |
| Paris . . . 1 | 1689 | 1754 | 66 | 451 | 12 | 231 | 241 | 472 |
| „ . . . 2 | 1773 | 1797 | 25 | 494 | 19 | 137 | 163 | 300 |
| „ . . . 3 | 1804 | 1872 | 69 | 513 | 10 | 190 | 171 | 361 |
| „ . . . 4 | 1873 | 1894 | 22 | 551 | 15 | 177 | 130 | 307 |
| Deutschbrod . . | 1829 | 1871 | 41 | 589 | 22 | 342 | 224 | 566 |
| Sachsen, Grundwerthe . . . | 1864 | 1894 | 31 | 520 | 19 | 227 | 182 | 409 |
| Sachsen, Werthe für 1000 *m* . . | „ | „ | 31 | 1045 | 28 | 229 | 230 | 459 |
| Sachsen, Höhenfaktoren . . . | „ | „ | 31 | 52,5 | 2,2 | 32,5 | 24,0 | 56,5 |

Wie man sieht, zeichnet sich keine Station innerhalb einer Reihe auf irgend welche Weise ungünstig aus. Die mittleren Fehler der Mittel aus längeren Reihen sind naturgemäss kleiner als die aus kürzeren. Die beiden höchsten Stationen haben die grösseren Regenmengen und dabei die grösseren Schwankungen. Das Verhalten von Deutschbrod und Freiberg ist derart gleichartig, dass eine so bedeutende Störung in den Beobachtungen der ersteren Station, wie sie Brückner (m. vergl. S. 6) annimmt und auf die auch Hann hinweist, nicht begründet erscheint.

Die Schwankungen der aus den Grundformeln (Spalte 16) für 1000 *m* Höhe berechneten Regenmengen in Sachsen sind zwar grösser als die der Grundwerthe selbst, aber von einer Proportionalität mit den Mengen selbst ist keine Rede.

Ganz auffallend ist allerdings das Verhalten der vier Reihen in Paris. Die Mittelwerthe steigen von 451 bis 551 *mm* an, man kann es daher für gerechtfertigt finden, dass an der Zuverlässigkeit der älteren Pariser Beobachtungen gezweifelt wird. Es ist aber bemerkenswerth, dass dieselbe Erscheinung viele andere Stationen zeigen. So stellt Dr. J. Studnička*) 15 Stationen in Böhmen zusammen, von denen 11 früher wesentlich kleinere Regenmengen gehabt haben. Für Deutschbrod sollen die älteren Messungen 509 *mm* durchschnittlich ergeben haben, während aus den neueren 631 *mm* folgen, ich aus der Reihe 1829/71 aber 589 ± 22 *mm* erhielt.

In Prag, das Herr Brückner für homogen annimmt, sind die Mengen von 398 *mm* auf 532 *mm* gestiegen.

Ich halte es aber für bedenklich, mit Herrn Hann (Seite 67 der zitirten Abhandlung) dies ohne Weiteres als Folge „geeigneterer Aufstellung des Instruments und grösserer Sorgfalt“ zu betrachten. Jedenfalls verdienen die Männer, welche durch viele Jahre hindurch mit selbstloser Hingabe die Thatsachen sammelten, dass die Angelegenheit gründlich untersucht wird und derartige absprechende Urtheile erst auf Grund eingehender Diskussionen abgegeben werden.

Hierzu müssen alle die Hilfsmittel herangezogen werden, welche die Mathematik bietet; das haben weder Herr Hann, noch Herr Brückner und Andere gethan, und das muss diesen zum Vorwurf gemacht werden.

### *B)* Die Zeichen und Zeichenwechsel der Fehler *v.*

Bei einer rein zufälligen Folge der Regenmengen sollen nahezu ebensoviel positive als negative Fehler vorhanden und soll ebenso die Zahl der Zeichenwechsel gleich der der Zeichenfolgen sein. Ein Ueberwiegen der Zeichenwechsel ist der Zufälligkeit der Folge günstiger als das häufigere Auftreten der Zeichenfolgen.

| | *n* | Anzahl der Fehler: + | Anzahl der Fehler: — | Zeichen: wechsel | Zeichen: folgen |
|---|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge . . . | 67 | 32 | 35 | 12 | 54* |
| Dresden . . . . . | 67 | 32 | 35 | 42 | 24 |
| Freiberg . . . . . | 64 | 29 | 35* | 26 | 37* |
| Meissen . . . . . | 40 | 17 | 23* | 19 | 20 |
| Paris . . . . . 1 | 66 | 33 | 33 | 27 | 38* |
| „ . . . . . 2 | 25 | 14 | 11 | 12 | 12 |
| „ . . . . . 3 | 69 | 36 | 33 | 34 | 34 |
| „ . . . . . 4 | 22 | 10 | 12 | 11 | 10 |
| Deutschbrod . . . . . | 41 | 18 | 23 | 17 | 23* |
| Sachsen, Grundwerthe . . | 31 | 14 | 17 | 11 | 19* |
| „ 1000 *m* . . . . | 31 | 17 | 14 | 11 | 19* |
| „ Höhenfaktoren . . | 31 | 14 | 17 | 17 | 13 |

Aus der vorstehenden Zusammenstellung ersieht man, dass bei der theoretischen Folge zwar die Zahl der positiven Fehler nahe gleich der der negativen ist, aber Zeichenfolgen

*) Grundzüge einer Hyetographie des Königreichs Böhmen. Prag 1887. Archiv der naturw. Landesforschung, Bd. VI, Nr. 3.

entschieden viel häufiger sind, als Wechsel derselben. Dies würde, wenn wir es nicht wüssten, schon darauf hindeuten, dass wir es mit gesetzmässigen Schwankungen zu thun haben. Aehnlich, wenn auch lange nicht so hervortretend, ist dies bei den anderen durch * gekennzeichneten Reihen.

Bei Dresden und den Höhenfaktoren überwiegen die Zeichenwechsel, es wird dies also der reinen Zufälligkeit günstiger sein.

### *C)* Die Zeichen und Zeichenwechsel der $\delta$.

Unter $\delta$ werden die Differenzen verstanden, welche die aufeinander folgenden $v$ mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen liefern. Bei einer rein zufälligen Anordnung der Reihenwerthe müssen dieselben Erscheinungen wie unter *B)* eintreten.

| | $n$ | Anzahl der $\delta$ + | Anzahl der $\delta$ − | Zeichen- wechsel | Zeichen- folgen |
|---|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge | 67 | 33 | 33 | 13 | 52* |
| Dresden | 67 | 31 | 35 | 51 | 14 |
| Freiberg | 64 | 29 | 34 | 41 | 21 |
| Meissen | 40 | 21 | 18 | 29 | 9 |
| Paris 1 | 66 | 28 | 37* | 38 | 26 |
| „ 2 | 25 | 12 | 12 | 16 | 7 |
| „ 3 | 69 | 34 | 34 | 43 | 24 |
| „ 4 | 22 | 11 | 10 | 14 | 6 |
| Deutschbrod | 41 | 22 | 18 | 28 | 11 |
| Sachsen, Grundwerthe | 31 | 12 | 18* | 21 | 8 |
| „ 1000 $m$ | 31 | 14 | 16 | 21 | 8 |
| „ Höhenfaktoren | 31 | 15 | 15 | 21 | 8 |

Während bei der theoretischen Folge gegen die Zufälligkeit entschieden das Ueberwiegen der Zeichenfolgen spricht, lassen die Beobachtungsreihen ohne Ausnahme die Zeichenwechsel hervortreten und ergeben so die Zufälligkeit der Folge der Regenmengen.

Wollte man ganz streng verfahren, so müssten noch die Differenzenreihen höherer Ordnung gebildet werden. Bei rein zufälliger Anordnung werden diese Reihen alsdann Zahlen zeigen, deren absolute Werthe sehr verschieden sind, und werden Zeichenwechsel sich stark häufen.

Je mehr aber die Differenzen sich nach Grösse und Vorzeichen gleich gestalten, d. h. je zeitiger eine Differenzenreihe Zahlen giebt, die sich der Null nähern, um so wahrscheinlicher ist die gesetzmässige Folge. Würden die $s$ durch eine Formel $a + bx$ darstellbar sein, worin $x$ die Nummer des Beobachtungsjahres vom Beginn der Beobachtung an bedeuten würde, so würde die zweite Differenzenreihe verschwinden, bei der Formel $a + bx + cx^2$ die dritte u. s. w.

Betrachtet man die $\delta$ in den Tabellen auf Spalte 24 und 25, so ersieht man sofort, dass bei Dresden ein Verschwinden der höheren Differenzenreihen ganz undenkbar ist, dass es sich also nicht der Mühe lohnt, dieselben zu bilden.

Anders ist dies aber mit den $\delta$ für die theoretische Folge, diese gestalten sich so, dass wahrscheinlich nur wenige weitere Differenzenreihen gebildet werden könnten.

Ein ganz gleiches Aussehen wie bei der Reihe für Dresden haben die $\delta$ der anderen Beobachtungsreihen.

### *D)* Die Zeichen und Zeichenwechsel der $\tau$.

Die $\tau$ werden ebenfalls als Differenzen der $v$, aber ohne Rücksicht auf die Vorzeichen derselben gebildet. Ich habe bei Ableitung der $\tau$ alle $v$ als positiv gerechnet.

Als Kennzeichen der Zufälligkeit gilt gleiche Häufigkeit der positiven und negativen $\tau$, sowie Gleichheit der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen eventuell Ueberwiegen der ersteren.

| | $n$ | Zahl der $\tau$ + | Zahl der $\tau$ − | Zeichen- wechsel | Zeichen- folgen |
|---|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge | 67 | 34 | 32 | 23 | 42* |
| Dresden | 67 | 35 | 31 | 41 | 24 |
| Freiberg | 64 | 36 | 27 | 41 | 21 |
| Meissen | 40 | 17 | 22 | 23 | 15 |
| Paris 1 | 66 | 34 | 31 | 38 | 26 |
| „ 2 | 25 | 15 | 9 | 15 | 8 |
| „ 3 | 69 | 32 | 36 | 49 | 18 |
| „ 4 | 22 | 8 | 13 | 14 | 6 |
| Deutschbrod | 41 | 19 | 21 | 27 | 12 |
| Sachsen, Grundwerthe | 31 | 18 | 12 | 21 | 8 |
| „ 1000 $m$ | 31 | 15 | 15 | 28 | 1 |
| „ Höhenfaktoren | 31 | 13 | 17 | 16 | 13 |

Auch hier unterscheidet sich die theoretische Folge wesentlich von den Beobachtungsreihen. Bei allen letzteren ist das Kriterium der Zufälligkeit entschieden viel günstiger als irgend einer gesetzmässigen Anordnung.

### *E)* Das Abbe'sche Kriterium.

Nach Abbe soll bei einer rein zufälligen Folge der Regenmengen

$$0 = v_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 v_4 + \ldots + \tau_n v_1$$

sein. Hieraus findet man auch

$$[\delta\delta] = 2\,[vv],$$

d. h. die Quadratsumme der $\delta$ soll das Doppelte der Quadratsumme der $v$ sein.

| | $n$ | $[vv]$ | $[\delta\delta]$ | $[\delta\delta]:[vv]$ |
|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge | 67 | 783286 | 145160 | 0,185 |
| Dresden | 67 | 879589 | 1790579 | 2,036 |
| Freiberg | 64 | 1216102 | 1602842 | 1,318 |
| Meissen | 40 | 459721 | 1067474 | 2,322 |
| Paris 1 | 66 | 664279 | 985344 | 1,483 |
| „ 2 | 25 | 223760 | 345410 | 1,544 |
| „ 3 | 69 | 429349 | 877126 | 2,043 |
| „ 4 | 22 | 101109 | 229764 | 2,273 |
| Deutschbrod | 41 | 805768 | 1289032 | 1,600 |
| Sachsen, Grundwerthe | 31 | 323558 | 587600 | 1,816 |
| „ 1000 $m$ | 31 | 706890 | 1094520 | 1,548 |
| „ Höhenfaktoren | 31 | 4472,14 | 8402,04 | 1,879 |

Während bei der theoretischen Folge die Quadratsumme der $\delta$ nicht ganz 0,2 der $[vv]$ beträgt, ist sie bei allen Beobachtungsreihen 1,3 bis 2,3 mal so gross, schwankt also um den durch das Abbe'sche Kriterium geforderten Werth 2.

### *F)* Die charakteristischen Fehler.

Für die charakteristischen Fehler giebt die Ausgleichungsrechnung folgende Definitionen:

Mittlerer Fehler der Einzelwerthe

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \frac{5}{4} d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Durchschnittlicher Fehler der Einzelwerthe

$$d = \pm \frac{[v] \text{ absolut}}{\sqrt{n\,(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wahrscheinlicher Fehler der Einzelwerthe

$$r = \pm \frac{2}{3} \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ausserdem soll sein

$$\mu : d = 1{,}25 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der wahrscheinliche Fehler soll in der nach ihrer Grösse geordneten Reihe der $v$ in der Mitte liegen, so dass er auch durch Abzählung bestimmt werden kann.

Nachstehend findet man die Resultate der Rechnung, wobei die nach Formel 3 berechneten wahrscheinlichen Fehler mit $r'$, die durch Abzählung gefundenen mit $r''$ überschrieben sind.

| | $n$ | $[vv]$ | $[v]$ absol. | $\mu$ | $d$ | $r'$ | $r''$ | $\mu : d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Theoretische Folge | 67 | 783286 | 5886 | ± 109 | ± 89 | ± 73 | ± 80 | 1,23 |
| Dresden . . . | 67 | 879589 | 5773 | 115 | 87 | 77 | ± 63 | 1,33 |
| Freiberg . . . | 64 | 1216102 | 6966 | 139 | 110 | 93 | 95 | 1,27 |
| Meissen . . . | 40 | 459721 | 3402 | 137 | 86 | 91 | 67 | 1,59 |
| Paris . . . 1 | 66 | 664279 | 5395 | 102 | 82 | 67 | 76 | 1,23 |
| „ . . . 2 | 25 | 223760 | 2090 | 97 | 85 | 64 | 93 | 1,13 |
| „ . . . 3 | 69 | 429349 | 4517 | 79 | 66 | 53 | 58 | 1,20 |
| „ . . . 4 | 22 | 101109 | 1151 | 69 | 54 | 46 | 39 | 1,30 |
| Deutschbrod . . | 41 | 805768 | 4906 | 142 | 121 | 95 | 124 | 1.17 |
| Sachsen, Grundwerthe . . . | 31 | 323558 | 2550 | 104 | 83 | 69 | 64 | 1,25 |
| Sachsen, 1000 $m$ | 31 | 706890 | 4304 | 153 | 141 | 102 | 140 | 1,08 |
| „ Höhenfaktoren . . | 31 | 4472,14 | 331,0 | 12,2 | 10,9 | 8,1 | 9,1 | 1,12 |

Darnach zeichnen sich die Pariser Reihen durch kleinste mittlere Fehler der einzelnen Regenmengen aus, was sehr gegen die von diesen behauptete Unzuverlässigkeit spricht. Freiberg, Meissen und Deutschbrod haben nahezu gleiche mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen, am grössten ist $\mu$ bei den aus den Grundformeln berechneten Regenmengen in Sachsen für 1000 $m$. Als Kennzeichen für die Zufälligkeit der Folge der Regenmengen wird man einerseits die Uebereinstimmung der $r'$ und $r''$, andererseits das Annähern des Verhältnisses $\mu : d$ an 1,25 betrachten können. Man sieht aber, dass dieses Kriterium nicht recht zuverlässig ist, da man darnach gerade die gesetzmässige theoretische Folge als eine rein zufällige ansehen müsste.

Die mittleren Fehler für die vieljährigen Mittel werden bekanntlich nach der Formel $\mu : \sqrt{n}$ berechnet, dieselben wurden bereits in der Tabelle unter A eingestellt. Ich will hier bemerken, dass ich nur diesen mittleren Fehler — abweichend von der Gepflogenheit in der Meteorologie — dem Resultat beifüge, da nur dieser nach den Lehren der Ausgleichungsrechnung eine bestimmte Bedeutung: **die des wahrscheinlichsten Fehlers des Resultates** hat. Es ist zu wünschen, dass die jeder Begründung entbehrende Rechnung mit dem wahrscheinlichen Fehler einmal aufhörte und dabei die ganz ausserhalb des Systemes der gewöhnlichen Fehlerrechnung stehende Fechner'sche Formel in Wegfall käme. Gegen Herrn Hann*) muss ich behaupten, dass die Formel

$$r = \frac{5}{6} \frac{[v]}{\sqrt{n\,(n-1)}},$$

welche sich aus den vorstehenden Formeln ergiebt, mindestens ebenso bequem ist, als die Fechner'sche Formel

$$r = 1 \cdot 1955 \frac{[v]}{\sqrt{n\,(2n-1)}}.$$

Sie ist sogar bei einigermaassen grossen $n$ bequemer, da alsdann praktisch genau einfach

$$r = \frac{5}{6} \frac{[v]}{n}$$

gesetzt werden kann und dies eine einfache Bedeutung hat. Die Rechnung mit der Summe der absoluten Fehlerwerthe wendet man ja dann nur an, wenn $n$ gross ist; bei wenig Beobachtungswerthen empfiehlt sich stets mehr die Anwendung der Fehlerquadrate.

Am einfachsten und am leichtesten verständlich dürfte es sein, für die Charakteristik der Einzelwerthe deren durchschnittlichen Fehler

$$d = \pm \frac{[v]}{\sqrt{n\,(n-1)}} \text{ oder kurz } \pm \frac{[v]}{n} \quad . \quad . \quad (5)$$

und für das Resultat dessen mittleren Fehler

$$\mu_r = \pm \frac{5}{4} \frac{d}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n\,(n-1)}} \quad . \quad . \quad (6)$$

zu geben.

### *G)* Die Präzisionskonstante und Fehlerwahrscheinlichkeit.

Wenn in einer Reihe von Regenmengen die Folge rein zufällig ist, so ist nach dem Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsgesetz die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $v$

$$\varphi(v) = w\, e^{-\pi w^2 v^2} = w \cdot 10^{-M \pi w^2 v^2} \quad . \quad . \quad (7)$$

wobei man sich $v$ durch $1^{mm}$ dividirt denken muss, da $\varphi(v)$ eine unbenannte Zahl ist und $M = 0{,}43429$ den Modul der gem. Log. bedeutet.

$w$ ist die Präzisionskonstante, welche nach der Formel

$$w = 0 \cdot 39895 : \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu berechnen ist und die zugleich die „Wahrscheinlichkeit des Fehlers 0“ darstellt.

Für Dresden findet sich so

$$w = 0{,}003456$$
$$\varphi(v) = 0{,}003456\, e^{-0.00003752\, v^2}$$
$$= 0{,}003456 \times 10^{-0.00001629\, v^2}$$

und es ist darnach

*) Seite 47 der zitirten Abhandlung. Hier ist übrigens ein Druckfehler, statt $\overline{0{,}7755}$ muss es $\overline{0{,}07755}$ heissen.

$\varphi\ (0) = 0{,}0035\quad \varphi(100) = 0{,}0024\quad \varphi(200) = 0{,}0008$
$\varphi(50) = 0{,}0031\quad \varphi(150) = 0{,}0015\quad \varphi(300) = 0{,}0001.$

Würden also durch 10000 Jahre die Regenverhältnisse in Dresden unverändert bleiben, so würde man einen Fehler 0 in dieser Zeit 35 mal, einen Fehler + 50 *mm* oder — 50 *mm* je 31 mal, ± 100 *mm* je 24 mal, ± 150 *mm* je 15 mal, ± 200 *mm* je 8 mal und ± 300 nur je 1 mal zu erwarten haben.

**Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines der $n$ Fehler $v_1$ bis $v_n$,** wobei man sich diese von Millimeter zu Millimeter fortschreitend denken muss, ist

$$[\varphi(v)]_1^n = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \ldots\ldots + \varphi(v_{n-1}) + \varphi(v_n). \quad (9)$$

Man kann sich nun die Wahrscheinlichkeitskurve graphisch darstellen, wie dies in Fig. 3 der Tafel I allerdings verzerrt geschehen ist. Wenn dies derart ausgeführt wird, dass die Abszissen $v$ Millimeter gemacht werden, die zugehörigen Ordinaten so viel Millimeter lang sind, als $\varphi(v)$ angiebt, so kann man in der Summe 9 die $\varphi(v)$ als Längen in Millimetern betrachten.

Nun ist weiter zu sehen, dass diese Summe wenig geändert wird, wenn man den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\varphi(v_0) - \frac{1}{2}\varphi(v_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

hinzufügt, wo also $v_0$ der Fehler vor $v_1$ sein wird, falls $n$ genügend gross ist.

Dies giebt die Summe 9 zu

$$\frac{1}{2}\varphi(v_0) + \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \ldots\ldots + \varphi(v_{n-1}) + \frac{1}{2}\varphi(v_n). \quad (11)$$

Multiplizirt und dividirt man jedes Summenglied mit 1 *mm*, so erhält man

$$\left.\frac{1\,mm \times \frac{1}{2}\varphi(v_0) + 1\,mm \times \varphi(v_1) + \ldots}{1\,mm}\right.$$
$$\left.\frac{\ldots + 1\,mm \times \varphi(v_{n-1}) + 1\,mm \times \frac{1}{2}\varphi(v_n)}{1\,mm}\right\}. \quad (12)$$

Jetzt stellt jedes Summenglied ein Rechteck von der Länge $\varphi(v)$ *mm* und der Breite 1 *mm* dar, die Summe selbst ist der Näherungswerth für das Integral

$$\int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und dieses giebt die Grösse der Fläche, welche von der Wahrscheinlichkeitscurve, den Ordinaten $\varphi(v_0)$ und $\varphi(v_n)$ und dem zwischen diesen liegenden Stück der Abszissenachse begrenzt wird.

Berücksichtigt man die Formel 7, so wird auch

$$\int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, dv = w \int_{v_0}^{v_n} e^{-\pi w^2 v^2}\, dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_n} e^{-t^2}\, dt, \quad (14)$$

wenn

$$t = \sqrt{\pi}\, w\, v$$

gesetzt wird.

Es ist somit

$$[\varphi(v)]_1^n = \int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, dv : 1\,mm \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

oder auch einfach

$$= \int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, dv.$$

Man sieht nämlich, dass die vorstehende Betrachtung gültig bleibt, wenn man statt 1 *mm* jede beliebige kleine Einheit — so klein als man will — derselben zu Grunde legt, und dass das Weglassen der Division der Fläche, welche das Integral bedeutet, durch die Längeneinheit nur eine Aenderung der Benennung, nicht aber des Zahlenwerthes bedingt. Wenn man also die letzte einfache Form des Ausdruckes wählt, so muss man sich stets die Division hinzudenken.

Alsdann kann man auch $[\varphi(v)]_1^n$ als die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines beliebigen zwischen den Grenzen $v_o$ und $v_n$ liegenden Fehlers bezeichnen. Wählt man hierfür das Symbol $\Phi_{v_0}^{v_n}$, so ist

$$\Phi_{v_0}^{v_n} = \int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_n} e^{-t^2}\, dt. \quad . \quad . \quad (16)$$

Bekanntlich hat man für das Integral

$$\int_0^t e^{-t^2}\, dt$$

Tafeln berechnet, welche mit dem Argument $t$ den Integralwerth ergeben. Die Anwendung dieser Tafeln besteht darin, dass man die Integralwerthe für $t_n$ und $t_o$ aufsucht, deren Differenz bildet und so die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält.

Man kann aber diese umständliche Operation umgehen, wenn man berücksichtigt, dass die Wahrscheinlichkeitskurve nur schwach gekrümmt ist, so dass kleinere Stücke derselben genähert als gerade Linien aufgefasst werden können.

Alsdann kann man näherungsweise

$$\Phi_{v_0}^{v_n} = \int_{v_0}^{v_n} \varphi(v)\, d\varphi = \frac{1}{2}(v_n - v_0)\left\{\varphi(v_0) + \varphi(v_n)\right\} \quad (17)$$

setzen.

Diese Formel bezieht sich nur auf die positiven Fehler. Da die negativen gleich häufig zu erwarten sind, wird für jeden derselben dieselbe Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestehen und wird also die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines positiven oder negativen Fehlers zwischen den absoluten Werthen $v_o$ und $v_n$ sein

$$\Phi_{\pm v_0}^{\pm v_n} = (v_n - v_0)\left\{\varphi(v_0) + \varphi(v_n)\right\} \quad . \quad (18)$$

Ich habe diese Ableitung hier ausführlich gegeben, da sie mir einfacher erscheint als die gewöhnliche, namentlich als die von Weinstein auf Seite 57 seines bereits genannten Werkes.

Die Formel 18 habe ich noch nirgends gefunden, sie wird in den meisten Fällen mit hinlänglicher Genauigkeit gebraucht werden können.

Nach den vorstehenden Formeln wurden die Präzisionskonstanten für die 7 längeren Reihen berechnet und daraus die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens positiver oder negativer Fehler zwischen 0 bis 20 *mm*, 20 bis 40 *mm* u. s. w. hergeleitet.

In der folgenden Tabelle sind diese Werthe in Prozenten ausgedrückt, sie geben also an, wieviel unter 100 Beobachtungen positive oder negative Fehler 0 bis 20, 20 bis 40 u. s. w. Millimeter Grösse haben würden, wenn die Gestaltung der Regenverhältnisse lediglich dem Zufall unterliegt.

Zum Vergleich wird auch hier die theoretische Folge vorgestellt.

| | Theoret. Folge | Dresden | Freiberg | Meissen | Paris 1 | Paris 3 | Deutschbrod |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 67 | 67 | 64 | 40 | 66 | 69 | 41 |
| $w =$ | 0,00366 | 0,00346 | 0,00287 | 0,00292 | 0,00395 | 0,00502 | 0,00281 |
| 0— 20 | 14,5 | 13,7 | 11,4 | 11,6 | 15,6 | 19,8 | 11,2 |
| 20— 40 | 14,0 | 13,3 | 11,2 | 11,4 | 15,0 | 18,6 | 11,0 |
| 40— 60 | 31,1 | 12,5 | 10,7 | 10,9 | 13,9 | 16,4 | 10,5 |
| 60— 80 | 11,9 | 11,5 | 10,1 | 10,2 | 12,4 | 13,6 | 9,9 |
| 80—100 | 10,4 | 10,2 | 9,3 | 9,4 | 10,6 | 10,6 | 9,2 |
| 100—120 | 8,8 | 8,8 | 8,4 | 8,4 | 8,7 | 7,8 | 8,3 |
| 120—140 | 7,2 | 7,3 | 7,4 | 7,4 | 6,9 | 5,3 | 7,4 |
| 140—160 | 5,7 | 6,0 | 6,4 | 6,4 | 5,3 | 3,4 | 6,4 |
| 160—180 | 4,4 | 4,7 | 5,4 | 5,4 | 3,9 | 2,1 | 5,5 |
| 180—200 | 3,2 | 3,6 | 4,5 | 4,5 | 2,7 | 1,2 | 4,6 |
| 200—220 | 2,3 | 2,7 | 3,7 | 3,6 | 1,9 | 0,6 | 3,8 |
| 220—240 | 1,6 | 1,9 | 2,9 | 2,8 | 1,2 | 0,3 | 3,0 |
| 240—260 | 1,1 | 1,3 | 2,3 | 2,2 | 0,8 | 0,1 | 2,4 |
| 260—280 | 0,7 | 0,9 | 1,8 | 1,7 | 0,5 | 0,1 | 1,9 |
| 280—300 | 0,4 | 0,6 | 1,3 | 1,2 | 0,3 | 0,02 | 1,4 |
| über 300 | 0,7 | 1,0 | 3,2 | 2,9 | 0,3 | 0,08 | 3,5 |

Um zu sehen, wie weit diese nach dem Wahrscheinlichkeitsgesetz berechnete Fehlervertheilung thatsächlich vorhanden ist, hat man die vorstehend gegebenen Zahlen auf die Zahl der Fälle $n$ der einzelnen Reihen zu reduziren.

Theoretische Folge.

| Fehlergrenzen | Zahl der beobacht. Fälle + | — | zusammen | Berechnet | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| 0— 40 | 8 | 10 | 18 | 19 | —1 |
| 40— 80 | 8 | 8 | 16 | 17 | —1 |
| 80—120 | 7 | 7 | 14 | 13 | +1 |
| 120—160 | 5 | 6 | 11 | 9 | +2 |
| 160—200 | 1 | 3 | 4 | 5 | —1 |
| 200—300 | 3 | 1 | 4 | 4 | 0 |
| über 300 | — | — | — | — | 0 |

| Fehlergrenzen | Zahl der beobacht. Fälle + | — | zusammen | Berechnet | Differenz | Zahl der beobacht. Fälle + | — | zusammen | Berechnet | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Dresden $n=67$ | | | | | Freiberg $n=67$ | | | | |
| 0— 40 | 13 | 10 | 23 | 18 | +5 | 6 | 8 | 14 | 15 | —1 |
| 40— 80 | 5 | 12 | 17 | 16 | +1 | 7 | 6 | 13 | 13 | 0 |
| 80—120 | 5 | 5 | 10 | 13 | —3 | 5 | 6 | 11 | 11 | 0 |
| 120—160 | 2 | 4 | 6 | 9 | —3 | 2 | 10 | 12 | 9 | +3 |
| 160—200 | 2 | 1 | 3 | 6 | —3 | 3 | 2 | 5 | 6 | —1 |
| 200—300 | 5 | 3 | 8 | 5 | +3 | 4 | 3 | 7 | 8 | —1 |
| über 300 | — | — | — | — | 0 | — | — | 2 | 2 | 0 |
| | Meissen $n=40$ | | | | | Paris 1689—1754 $n=66$ | | | | |
| 0— 40 | 5 | 8 | 13 | 9 | +4 | 10 | 9 | 19 | 20 | —1 |
| 40— 80 | 5 | 5 | 10 | 9 | +1 | 9 | 10 | 19 | 18 | +1 |
| 80—120 | 1 | 5 | 6 | 7 | —1 | 5 | 8 | 13 | 13 | 0 |
| 120—160 | 1 | 2 | 3 | 6 | —3 | 4 | 2 | 6 | 8 | —2 |
| 160—200 | 4 | 2 | 6 | 4 | +2 | 4 | 2 | 6 | 4 | +2 |
| 200—300 | 1 | 1 | 2 | 5 | —3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 |
| über 300 | — | — | — | — | | — | — | — | — | |
| | Paris 1804—1872 $n=69$ | | | | | Deutschbrod $n=41$ | | | | |
| 0— 40 | 12 | 9 | 21 | 26 | —5 | 3 | 5 | 8 | 9 | —1 |
| 40— 80 | 14 | 12 | 26 | 21 | +5 | 1 | 3 | 4 | 8 | —4 |
| 80—120 | 6 | 7 | 13 | 13 | 0 | 3 | 4 | 7 | 7 | 0 |
| 120—160 | 2 | 3 | 5 | 6 | —1 | 4 | 5 | 9 | 6 | +3 |
| 160—200 | 2 | 2 | 4 | 2 | +2 | 5 | 5 | 10 | 4 | +6 |
| 200—300 | · | · | 0 | 1 | —1 | 1 | 1 | 2 | 5 | —3 |
| über 300 | — | — | — | — | 0 | 1 | — | 1 | 2 | —1 |

Ueberblickt man diese Resultate, so fällt sofort auf, dass bei der theoretischen Folge die thatsächliche Fehlervertheilung sich dem Wahrscheinlichkeitsgesetz besser anschmiegt als bei irgend einer der beobachteten Reihen, so dass auch dieses Kriterium recht gründlich täuschen kann.

Für die Güte der beiden langen Pariser Reihen, selbst für die ältere derselben, spricht, dass sie beide hohe Präzisionskonstanten haben und dass bei beiden sich die Fehlervertheilung dem Wahrscheinlichkeitsgesetz gut anpasst. In dieser Beziehung stellt sich die Reihe für Deutschbrod am ungünstigsten.

## Zusammenfassung.

1. Theoretische Folge. $v$, $\delta$ und $\tau$ kommen ebenso oft positiv als negativ vor und tritt keines der grossen $v$ auffällig hervor, es ist $\mu : d = 1{,}23$ und die Vertheilung der $v$ entspricht dem Wahrscheinlichkeitsgesetz.

Dies alles spricht für die rein zufällige Folge der Regenmenge. Dem entgegen steht aber das ganz entschiedene Ueberwiegen der Zeichenfolgen, selbst bei den $\tau$, und der Quotient $[\delta\delta] : [vv] = 0{,}2$.

Es würde also hier — wenn es nicht schon bekannt wäre — die Untersuchung bezüglich systematischer Verfälschung stark angezeigt sein.

2. Dresden. Der Zufälligkeit ist günstig, dass positive und negative $v$ bis zu gleicher Grösse vorkommen, positive und negative $v$, $\delta$, $\tau$ nahezu gleich häufig sind, die Zeichenwechsel stets die Folgen überwiegen, $[\delta\delta] : [vv] = 2{,}0$ und $\mu : d = 1{,}33$ ist.

Die Vertheilung der $v$ lässt ein zu häufiges Auftreten

der kleinsten und grössten $v$, demgemäss das seltenere Vorkommen der mittleren Fehler erkennen.

Resultat: Systematische Fehler sind nicht angezeigt.

3. Freiberg. Der Zufälligkeit günstig sind, dass bei den $\delta$ und $\tau$ die Z. W. überwiegen, $\mu : d = 1{,}27$ ist und die Fehlervertheilung passt.

Dem entgegen steht aber das Ueberwiegen des grössten positiven Fehlers über den negativen. Weiter sind positive und negative $v$, $\delta$ und $\tau$ der Zahl nach verschieden, und bei den $v$ überwiegen die Z. F. Endlich ist $[\delta\delta] : [vv]$ nur 1,3.

Resultat: Systematische Fehler können vermuthet werden.

4. Meissen. Der positive Extremfehler überwiegt den negativen zwar etwas, aber nicht allzusehr. Die Kriterien der $v$, $\delta$ und $\tau$, sowie $[\delta\delta] : [vv] = 2{,}3$ sind der Zufälligkeit günstig; dagegen ist nur $\mu : d = 1{,}59$ und das zu häufige Vorkommen der kleinen Fehler.

Resultat: Es liegt kaum eine Ursache zum Forschen nach einer systematischen Fälschung vor.

5. Paris I. Reihe. Gegen die reine Zufälligkeit der Folge der Regenmengen spricht hier nur, dass die positiven $\delta$ seltener als die negativen sind, bei den $v$ Z. W. seltener als Z. F. vorkommen und $[\delta\delta] : [vv] = 1{,}5$ ist. Alle anderen Kriterien sind der Zufälligkeit günstig.

Resultat: Es ist das Suchen nach systematischen Fälschungen nur wenig angezeigt.

6. Paris II. Reihe.

Alle Kriterien sprechen für die Zufälligkeit, es kann nur auffallen, dass positive $\tau$ überwiegen und $[\delta\,\delta] : [v\,v]$ nur 1,5 ist.

7. Paris III. Reihe.

Alle Kriterien sind der Zufälligkeit günstig.

8. Paris IV. Reihe.

Alle Kriterien sind günstig, höchstens kann das Ueberwiegen der positiven Extremmenge und der Zahl der negativen $\tau$ auffallen.

9. Deutschbrod. Hier überwiegt die positive Extremmenge die negative ganz bedeutend. Die Zahl der positiven $v$ ist kleiner als die der negativen und es sind Z. W. seltener als Z. F. Bei den $\delta$ überwiegen die positiven Werthe an Zahl, $[\delta\,\delta] : [v\,v]$ ist nur 1,6 und die Fehler-Vertheilung lässt ein zu seltenes Auftreten der kleinen und grossen Fehler erkennen. Diesen ungünstigen Zeichen stehen aber als gewichtig das Ueberwiegen der Z. W. bei den $\delta$ und $\tau$, sowie $\mu : d = 1{,}17$ gegenüber.

Resultat: Die Vermuthung systematischer Fälschungen ist kaum begründet.

10. Die Grundwerthe für Sachsen.

Gegen die Zufälligkeit spricht, dass bei $v$, $\delta$ und $\tau$ die positiven und negativen Werthe nicht gleich häufig sind und bei den $v$ die Z. F. überwiegen.

Alle anderen Kriterien sprechen dafür und so ist auch hier die Zufälligkeit nahezu begründet.

11. Die Regenmengen in 1000 *m* Höhe für Sachsen.

Hier kann gegen die Zufälligkeit nur das Ueberwiegen der Z. F. bei den $v$ geltend gemacht werden.

12. Die Höhenfaktoren für Sachsen.

Alle Kriterien sind der Zufälligkeit günstig.

Als **Hauptresultat** geht somit hervor, dass eigentlich nur bei Freiberg die vorschriftsmässigen Kriterien systematische Verfälschungen irgend welcher Art erkennen lassen, und es ist bemerkenswerth, dass gerade hier triftige Gründe vorliegen, solche zu vermuthen.

Der Regenmesser hat in Freiberg anfangs auf der Plattform des Daches des Akademiegebäudes gestanden und wurde später in den Hof gestellt. Ich habe es absichtlich unterlassen, hierüber nähere Erkundigung einzuziehen, um nicht bei den vorliegenden Untersuchungen irgendwie von vornherein beeinflusst zu werden.

**Und trotzdem ist es schwer, beim Anblick der graphischen Darstellung der Regenmengen auf Tafel I an die reine Zufälligkeit zu glauben.**

Das eine scheint bestimmt hervorzutreten, dass Zeiten mit besonderem Mangel an Regen und solche mit besonderem Reichthum daran auftreten können. Die Ursachen für den einen oder anderen Witterungscharakter werden also längere Zeit bestehen und so einer Reihe von Jahren einen bestimmten Charakter geben.

Es liegt somit kein Grund vor, eine Reihe als unzuverlässig zu bezeichnen, wenn sie eine Zeit lang geringe und durch eine andere Zeit grosse Regenmengen ergiebt. Andererseits kann man daraus auch nicht eine Periodizität ohne Weiteres ableiten, hierzu müssen erst besondere Untersuchungen angestellt werden, und dazu gehört ein genügend umfangreiches und zuverlässiges Material. Es ist höchst bedenklich, (wie Herr Brückner) aus 60- bis 70jährigen Beobachtungen eine 35jährige Periode ableiten zu wollen.

Das der Untersuchung unterliegende Material ist auf Tafel I dargestellt worden; höchst bedauerlich ist, dass unsere Reihen nur einen so schmalen Streifen darstellen, während Paris sich über die ganze Blattbreite erstreckt.

Was die Anlage der Tafel I betrifft, so ist diese wohl ohne Weiteres verständlich. Der Raum eines Jahres wurde durch 1 *mm* Abszissenlänge und die Jahresmengen durch Säulen in $^1/_{10}$ der Niederschlagshöhen dargestellt. Das 18. Jahrhundert liegt unter dem weissen Streifen, die wenigen Jahre des 17. und die 94 Jahre unseres Jahrhunderts links und rechts unter den schwarzen Streifen. In allen Reihen wurden deren Gesammtmittel durch horizontale Linien angegeben und wurden die über diese hinaus gehenden Theile der Jahressäulen besonders kenntlich gemacht, so dass man die Zeiten übernormaler Mengen sofort erkennen kann.

1) Wie bereits erwähnt wurde, liegt der mit der Bezeichnung **„theoretischer Verlauf“** versehenen Reihe die Gleichung

$$s = 700 + 100 \cos 36\,x + 100 \sin 10\,x - 100 \cos 3\,x$$

zu Grunde. Darnach entsteht dieser Verlauf durch Interferenz von drei unabhängigen Schwankungen, welche zwar gleiche Schwingungsweiten haben, deren Periodenlängen aber 10, 36 und 120 Jahre sind, so dass die Periodenlänge der Interferenzkurve 360 Jahre beträgt und Tafel I nur einen Theil derselben zum Ausdruck bringt. Die genannten Perioden sind denen von 11, 35 und 110 Jahren nahe, sie wurden lediglich zur Vereinfachung der Rechnung so gewählt. Die Schwingungsweiten, welche im günstigsten Fall Abweichungen $\pm$ 300 *mm* ergeben können, entsprechen

den Grössen, welche die Beobachtungen als möglich ergeben haben.

Das Bild des Gesammtverlaufes ist komplizirt und zeigt, welcher Irrthum bezüglich der Niederschlagsverhältnisse eines Ortes entstehen kann, selbst dann, wenn ganz fehlerlose Messungen gerade während eines ungünstigen Zeitraumes zur Ableitung derselben herangezogen werden. Hätte man vielleicht das Mittel der Jahre 1721—40 gebildet, so würde man einen weit unternormalen Werth erhalten haben, während aus 1776/95 ein wesentlich zu hohes Mittel sich ergeben haben würde.

Weiter sieht man, zu welchem Unsinn es führen würde, wenn man aus einer beliebigen Anzahl von etwa 60 Jahren eine einfache Periodizität ableiten wollte. —

2) Betrachten wir nunmehr die **Pariser** Regenmengen, so muss zunächst erwähnt werden, dass wir bezüglich der Messungen in den Jahren 1697 und 1698 im Zweifel sind. Das Montsouris-Annuaire von 1876 giebt Seite 144 hierfür die Zeichen ", welche wir Deutschen als Wiederholungszeichen auffassen, während es wohl hier das Fehlen der Beobachtungen ausdrücken soll. Der Rechner hatte die erste Bedeutung angenommen und wurde sie, um nicht das ganze Rechenwerk umarbeiten zu müssen, beibehalten.

Die Darstellung der Regenmengen auf Tafel I zeigt, dass die Korrektheit dieser Reihe gar nicht undenkbar ist. Eigentlich auffallend klein sind nur einige Zahlen des Zeitraumes 1719 bis 1733. Als Beobachter wird der Neffe Cassini's Maraldi angegeben. Herr Renou bezeichnet die Jahre 1718 und 1719 thatsächlich als sehr trocken. 1734 soll sich durch besonderen Regenreichthum ausgezeichnet haben und hält Herr Renou die Menge 471 *mm* (er giebt hierfür nur 404 *mm*) noch wesentlich zu klein.

Was Herr Renou sagt, kann zwar richtig sein, man muss jede Beobachtung anzweifeln dürfen, aber hierzu muss man auch Beweise beibringen. Wohin sollten wir kommen, wenn wir alle Beobachtungen, die uns auf den ersten Blick undenkbar erscheinen, einfach kassiren wollten?

Ist die Vertrauensseligkeit gefährlich, so halte ich Misstrauen ohne zwingenden Grund für noch viel gefährlicher, wir schrecken dadurch die Beobachter ab.

Es lassen sich recht gut Verhältnisse denken, die in einem niederschlagsreichen Sommer einzelne Stationen sehr trocken ergeben. Die Vorgänge sind komplizirter und lokaler Natur, so dass wir nur durch Messungen an möglichst viel Stellen sicheren Aufschluss über das Gesammtquantum der Menge erhalten können.

Es ist höchst bedauerlich, dass die Beobachtungen 1755—1772 und 1798—1803 fehlen. Um die weiter folgenden Prüfungen ohne Lücken vornehmen zu können, habe ich versucht, eine Interpolation vorzunehmen, und zwar unter Annahme des Hann'schen Gesetzes.

Hierzu wurden die Angaben benutzt, welche sich Seite 156 ff. der öfters erwähnten Klimaschwankungen von Brückner vorfinden. Die Stationen und deren normale Niederschlagssummen sind:

Padua 848 *mm*, Bordeaux 740 *mm*, Marseille 492 *mm*, Montpellier 853 *mm*, Pichon 583 *mm*, Zwanenburg 680 *mm*, Lyndon 637 *mm*, Lund 506 *mm*, Upsala 554 *mm* und Abo 604 *mm*.

Da Herr Brückner die Abweichungen in Prozenten der Normalmengen giebt, mussten diese Zahlen erst in Regenmengen verwandelt werden. So findet sich z. B. für Padua im Lustrum 1736/40 die relative Abweichung — 22 %; also war der Niederschlag 0,78 von 848 *mm*, das sind 661 *mm*. Die Lustrenmittel der Pariser Mengen wurden nach den Angaben im Montsouris-Annuaire gebildet.

| | Paris | Padua | Bordeaux | Marseille | Montpellier | Pichon | Zwanenburg | Lyndon | Lund | Upsala | Abo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1731/35 | 355 | 856 | 762 | — | — | 653 | -- | — | — | — | — |
| 1736/40 | 467 | 661 | 821 | — | — | 682 | — | 650 | — | — | — |
| 1741/45 | 364 | 840 | 710 | — | — | 571 | 619 | 561 | — | 576 | — |
| 1746/50 | 475 | 899 | 792 | — | — | 583 | 666 | 554 | 471 | 560 | — |
| 1751/55 | — | 967 | 659 | — | — | 507 | 762 | 675 | 435 | 598 | 683 |
| 1756/60 | — | 941 | 792 | — | — | 600 | 694 | 662 | 455 | 488 | 689 |
| 1761/65 | — | 975 | 737 | — | — | 589 | 857 | 675 | 501 | — | 568 |
| 1766/70 | — | 984 | 673 | 369 | 802 | 484 | 700 | 707 | 521 | — | 556 |
| 1771/75 | — | 882 | — | 600 | 947 | — | 666 | 726 | 557 | — | 556 |
| 1776/80 | 518 | 924 | 651 | 502 | 887 | — | 646 | 612 | 501 | — | 556 |
| 1781/85 | 506 | 856 | — | 438 | 819 | — | 728 | 624 | 552 | — | 556 |
| 1786/90 | 508 | 814 | — | 566 | 981 | — | 660 | 592 | 552 | — | 586 |
| 1791/95 | 418 | 848 | — | 507 | — | — | 626 | 631 | 511 | 504 | 683 |
| 1796/00 | — | 907 | — | 522 | 759 | — | 612 | 612 | 582 | 587 | 616 |
| 1801/05 | — | 1035 | — | 467 | 887 | — | 537 | — | 587 | 476 | — |
| 1806/10 | 465 | 992 | — | 369 | 836 | -- | 653 | — | 567 | 554 | — |
| 1811/15 | 486 | 806 | — | 384 | 819 | — | 619 | — | 445 | 543 | — |
| 1731/50 | 415 | 814 | 771 | — | — | 622 | — | — | — | — | — |
| 1776/95 | 488 | 861 | — | 503 | — | — | 665 | 615 | 529 | — | 595 |
| 1806/15 | 476 | 899 | — | 377 | 828 | — | 636 | — | 506 | 549 | — |
| 1731/50 | Verhältniss zu Paris | 0,51 | 0,54 | — | — | 0,67 | — | — | — | — | — |
| 1776/95 | | 0,57 | — | 0,97 | — | — | 0,73 | 0,79 | 0,92 | — | 0,82 |
| 1806/15 | | 0,53 | — | 1,26 | 0,58 | — | 0,75 | — | 0,97 | 0,87 | — |
| Mittel $c$ | | 0,54 | 0,54 | 1,07 | 0,58 | 0,67 | 0,73 | 0,79 | 0,94 | 0,87 | 0,82 |
| Gewicht $p$ | | 5 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |

Diese Rechnung ist wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Zu bemerken ist nur, dass bei Ableitung der Mittel der Verhältnisszahlen die Werthe der beiden ersten Reihen das doppelte Gewicht erhielten und die Mittel selbst mit Gewichten nach der Zahl der Dezennien belegt wurden.

Nunmehr erfolgte die Berechnung der fehlenden Lustrenmittel von Paris nach folgendem Schema:

1751/55

| | $p$ | $c$ | $\sigma$ | $s$ | $ps$ | $v$ | $vv$ | $pvv$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Padua . . . | 5 | 0,54 | 967 | 522 | 2610 | + 42 | 1764 | 8820 |
| Bordeaux . | 2 | 0,54 | 659 | 356 | 712 | — 124 | 15376 | 30752 |
| Marseille . . | (3) | 1,07 | — | — | — | — | — | — |
| Montpellier . | (1) | 0,58 | — | — | — | — | — | — |
| Pichon . . | 2 | 0,67 | 507 | 340 | 680 | — 140 | 19600 | 39200 |
| Zwanenburg . | 3 | 0,73 | 762 | 556 | 1168 | + 76 | 5776 | 17328 |
| Lyndon . . | 2 | 0,79 | 675 | 533 | 1066 | + 53 | 2809 | 5618 |
| Lund . . . | 3 | 0,94 | 435 | 409 | 1227 | — 71 | 5041 | 15123 |
| Upsala . . . | 1 | 0,87 | 598 | 520 | 520 | + 40 | 1600 | 1600 |
| Abo . . . . | 2 | 0,82 | 683 | 560 | 1120 | + 80 | 6400 | 12800 |
| | $[p] = 20$ | | | | $[ps] = 9603$ | | | $[pvv] = 131241$ |

$n = 8$ Mittel $s_0 = [ps] : [p] = 480\ mm$

$\mu_0$ = Mittlerer Fehler von $s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p][n-1]}} = \pm 31\ mm$

Als $\sigma$ erscheinen die Lustrenmittel, welche an den daneben stehenden Stationen beobachtet worden waren. Daraus werden als $s = c\,\sigma$ die Werthe berechnet, welche Paris zukommen. Zur Bildung von $[p]$ wurden natürlich nur die $p$ der $c$ herangezogen, für welche $\sigma$ vorlagen. $n$ ist die Zahl dieser $\sigma$.

Ich erhielt so als wahrscheinlichste Lustrenmittel für die fehlenden Beobachtungen zu Paris nachstehende Werthe:

| | $n$ | $[p]$ | $s_0$ | $\mu_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1751/55 | 8 | 20 | 480 | $\pm 31$ |
| 1756/60 | 8 | 20 | 480 | $\pm 19$ |
| 1761/65 | 7 | 19 | 501 | $\pm 29$ |
| 1766 70 | 9 | 23 | 466 | $\pm 26$ |
| 1771/75 | 7 | 19 | 523 | $\pm 25$ |
| 1796/00 | 8 | 20 | 503 | $\pm 14$ |
| 1801/05 | 6 | 16 | 504 | $\pm 23$ |

Man sieht, dass die $s_0$ mit Unsicherheiten behaftet sind, die $\pm$ 3 — 6 % ihrer Werthe betragen.

Die 3 Lustrenmittel von 1756—1770 wurden als für die Jahre 1758, 1763 und 1768 nahezu gültig in die Säulenreihen für Paris als schwarze Säulen von Grund auf eingetragen. Dasselbe geschah mit den zwei letzten Werthen, welche zu 1798 und 1803 gehörig gerechnet wurden.

Die noch übrig bleibenden Werthe würden zu 1753 und 1773 gehören. Hierfür liegen aber die beobachteten Werthe 481 resp. 593 *mm* vor. Die erstere Zahl stimmt fast genau mit dem interpolirten Lustrenmittel für 1751/55, die letztere ist aber um 70 *mm* grösser als das berechnete Mittel 1771/75.

Im Allgemeinen passen die interpolirten Werthe gut in die Beobachtungsreihe hinein, und wird man die Interpolation der Zwischenwerthe zur Vervollständigung der ganzen Reihe recht gut vornehmen können.

Im Ganzen liegen also von 182 Jahren Beobachtungen vor, welche als Generalmittel 492 *mm* ergeben.

Eigentlich hätte diese ganze Reihe auf Zufälligkeit der Anordnung der Regenmengen untersucht werden sollen. Ich habe dies unterlassen, weil man annehmen kann, dass, wenn die Theile der Reihe als zufällig angeordnet erscheinen, dies auch bei der ganzen Reihe der Fall sein sollte.

Auffallen muss jedoch das Ansteigen der Mittel aus den einzelnen Stücken der Reihe und lässt dies vermuthen, dass doch die Anwendung der Zufälligkeitskriterien auf die ganze Reihe derselben etwas weniger günstige Resultate liefern würde. Zweifellos würde bei einer Annahme des Generalmittels zu rund 500 *mm* in der ersten Reihe die Zahl der positiven Fehler stark vermindert, in der letzten vermehrt werden. Auf die Mittelreihen würde der Einfluss nur gering sein.

Die Auszählung auf Tafel I längs der 500 *mm* Linie ergab aber doch die Gleichheit der positiven und negativen Abweichungen. Jedoch ist alsdann in der ganzen Reihe die Zahl der Zeichenwechsel der $v$ nur 74 gegen 107 Zeichenfolgen.

Das Kriterium der $\delta$ würde aber ungeändert günstig der Zufälligkeit bleiben, da diese durch Veränderung der $v$ um konstante Grössen nicht verändert werden. Namentlich würden in der ganzen Reihe die Differenzen höherer Ordnung ebensowenig verschwinden, als in deren Theilen.

Die Gestaltung der $\tau$ lässt sich ohne Rechnung nicht übersehen, ebenso nicht die der Quadratsumme der $v$. Die Abweichungen der Extremwerthe der ganzen Reihe 210 *mm* (1733) und 728 *mm* (1886) von dem Generalmittel 492 *mm* würde keinen Fehler als besonders stark hervortreten lassen.

Ganz ähnliche Zahlen zeigen alle Reihen und somit liegt von dieser Seite betrachtet kein Grund vor, an der Möglichkeit dieser Zahlen zu zweifeln. Weiteres hierüber findet man in den folgenden Abschnitten.

3) Unter der Reihe der Regenmengen in Paris findet man die von **Deutschbrod**. Hier fehlen zwei Jahre und sind diese durch schwarze Säulen zwischen 300 und 400 *mm* kenntlich gemacht worden. Die Figur hat allerdings eine recht merkwürdige Gestalt, so dass es schwer ist, ohne Weiteres an Zufälligkeit der Folge oder Korrektheit der Beobachtungen zu glauben. Betrachtet man aber die besonders hervortretenden Einzelheiten, so finden diese sich in fast allen den darunter befindlichen Reihen angedeutet. So kommt man also zu dem Schluss, dass man entweder alle früheren Beobachtungen verwirft, oder Schwankungen in den Jahresmengen, wie sie aus diesen Darstellungen sich ergeben, für möglich und die Beobachtungen selbst als zuverlässig betrachtet.

Sollte die Periodizität thatsächlich bestehen, welche die oberste theoretische Säulenreihe darstellt, so wäre an der Berechtigung der Beobachtungen in Deutschbrod nicht im geringsten zu zweifeln.

4) Die Beobachtungen in **Dresden** lassen die Zufälligkeit der Anordnung besser hervortreten.

Es fällt aber auch bei dieser Reihe auf, dass während der ersten Jahre besonders oft die geringen und geringsten Regenmengen beobachtet wurden.

5) Aehnlich ist dies bei **Freiberg**, hier kommt aber noch mehr die Trockenheit der 60er und 70er Jahre zur Geltung.

6) Die Niederschlagsverhältnisse **Meissens** während dieser Zeit entsprechen im Ganzen denjenigen Freibergs.

7) Das Bild vervollständigen die Darstellungen der Grundwerthe für Sachsen und die Niederschlagsmengen, welche sich aus den Grundgleichungen für 1000 *m* Höhe ergeben. Es ist bemerkenswerth, dass die Darstellung der ersteren in umgekehrter Reihenfolge eine genau gleiche Erscheinung zeigt wie die der Messungen in Deutschbrod. Hier würde man also mit demselben Recht einen Bruch oder Nachlässigkeit in den früheren Beobachtungen etwa vor 1879 annehmen können. Eine solche Behauptung müsste ich entschieden zurückweisen und von dem, der sie aufstellen sollte, Beweise verlangen, ehe ich die Richtigkeit eines so schweren Vorwurfs gegen meinen Amtsvorgänger und seine Mitarbeiter anerkenne.

Zur besseren Uebersicht wurden die Grundwerthe, sowie die Regenmengen für 1000 *m* auf Tafel I nochmals in Fig. 1 dargestellt und noch die Mengen für eine Station mittlerer Höhe (370 *m*) hinzugenommen.

Darüber (Fig. 2) findet man auch die auf den Meter Höhe bezogenen Höhenfaktoren aufgetragen.

Die ganzen Säulenlängen stellen die Regenmenge für 1000 *m* dar, die obere Grenze zwischen der einfachen von links nach rechts abfallenden Schraffirung und der Kreuzschraffirung giebt die Niederschlagsmenge für 370 *m* und die untere Grenze der Kreuzschraffirungen die Grundwerthe für 0 *m*.

| | *n* | *h* | *s* | *Δh* | *b* | *Δs* | *s'* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1864 | 18 | 404 | 542 | — 34 | 0,51 | — 17 | 525 |
| 1865 | 19 | 358 | 542 | + 12 | 0,46 | + 5 | 547 |
| 1866 | 20 | 387 | 685 | — 17 | 0,62 | — 11 | 674 |
| 1867 | 20 | 387 | 836 | — 17 | 0,69 | — 12 | 824 |
| 1868 | 20 | 387 | 637 | — 17 | 0,43 | — 7 | 630 |
| 1869 | 20 | 361 | 631 | + 9 | 0,42 | + 4 | 635 |
| 1870 | 21 | 352 | 698 | + 18 | 0,66 | + 12 | 710 |
| 1871 | 22 | 370 | 603 | 0 | 0,34 | 0 | 603 |
| 1872 | 22 | 370 | 630 | 0 | 0,39 | 0 | 630 |
| 1873 | 22 | 370 | 594 | 0 | 0,45 | 0 | 594 |
| 1874 | 22 | 370 | 538 | 0 | 0,44 | 0 | 538 |
| 1875 | 22 | 370 | 765 | 0 | 0,53 | 0 | 765 |
| 1876 | 22 | 369 | 634 | + 1 | 0,44 | + 0 | 634 |
| 1877 | 22 | 369 | 729 | + 1 | 0,65 | + 1 | 730 |
| 1878 | 22 | 370 | 711 | 0 | 0,85 | 0 | 711 |
| 1879 | 22 | 370 | 802 | 0 | 0,59 | 0 | 802 |
| 1880 | 22 | 371 | 827 | — 1 | 0,59 | — 1 | 826 |
| 1881 | 22 | 371 | 770 | — 1 | 0,66 | — 1 | 769 |
| 1882 | 22 | 371 | 933 | — 1 | 0,52 | — 1 | 932 |
| 1883 | 22 | 370 | 734 | 0 | 0,50 | 0 | 734 |
| 1884 | 21 | 377 | 821 | — 7 | 0,61 | — 4 | 817 |
| 1885 | 22 | 370 | 676 | 0 | 0,47 | 0 | 676 |
| 1886 | 21 | 385 | 750 | — 15 | 0,29 | — 4 | 746 |
| 1887 | 22 | 372 | 664 | — 2 | 0,47 | — 1 | 663 |
| 1888 | 22 | 372 | 747 | — 2 | 0,65 | — 1 | 746 |
| 1889 | 22 | 372 | 895 | — 2 | 0,40 | — 1 | 894 |
| 1890 | 21 | 376 | 817 | — 6 | 0,62 | — 4 | 813 |
| 1891 | 19 | 388 | 860 | — 18 | 0,44 | — 8 | 852 |
| 1892 | 19 | 377 | 573 | — 7 | 0,54 | — 4 | 569 |
| 1893 | 19 | 365 | 674 | + 5 | 0,41 | + 2 | 676 |
| 1894 | 19 | 345 | 855 | + 25 | 0,64 | + 16 | 871 |

Die Ableitung der Werthe *s'* für 370 *m* geschah in der vorstehenden Tabelle. *n* ist die Zahl der Stationen, welche vollständige lückenlose Beobachtungen im betreffenden Jahr angestellt hatten, *h* deren mittlere Höhe und *s* das Mittel der Regenmengen. Diese *s* sind mit nur geringen Abweichungen — bedingt durch nachträgliche Korrektionen — diejenigen Werthe, welche ich im I. Klimaheft gegeben und als Beweis gegen die Brückner'sche 35jährige Periode — wenigstens für Sachsen — aufgestellt habe.

In seinem Referat über dieses Klimaheft*) sagt Herr Brückner, diese Zahlen seien wenig werth, da sie aus einer verschiedenen Zahl von Stationen abgeleitet seien und dass die Zunahme der fehlenden Stationen andere Werthe geliefert haben würde.

Darin hat Herr Brückner ganz Recht und ich kann mich über diese Kritik nicht beklagen, Herr Brückner giebt mir einfach den Vorwurf zurück, den ich ihm wegen seiner Gruppenmittelbildung gemacht habe.

Spalte 7/8 sieht man, dass die mittlere Ordinatenreihe Zahlen enthält, die hier aus 2, dort aus 3 und da aus 5 Einzelwerthen u. s. w. gebildet wurden. Zweifellos würden aber auch bei Herrn Brückner andere Mittel herausgekommen sein, wenn die fehlenden Einzelwerthe hätten verwendet werden können. Dann ist es auch ein bedeutender Unterschied, ob man zu einer Ordinatenreihe Mittel aus 2 bis 5 oder 18 bis 22 Einzelwerthen zusammenstellt.

Hierüber hätte Herr Brückner sich leicht folgende Rechnung anstellen können.

Es sollen die *m* Beobachtungen $s_1$, $s_2$ bis $s_m$ gegeben sein. Die Summe derselben sei

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m = S,$$

das Mittel

$$s = S : m.$$

Nimmt man die $\mu$ Beobachtungen $s_{m+1}, \ldots, s_{m+\mu}$ hinzu, bezeichnet deren Summe mit $\Delta S$ und das Mittel mit $\sigma$, so ist

$$\sigma = \Delta S : \mu$$

und die $m + \mu$ Beobachtungen ergeben das Mittel

$$s' = (S + \Delta S) : (m + \mu).$$

Hieraus erhält man

$$f = 100\,\frac{s' - s}{s} = 100 \cdot \frac{\mu}{m + \mu}\left(\frac{\sigma}{s} - 1\right)$$

als den in Prozenten von *s* ausgedrückten Fehler des Mittels *s*, wenn *s'* als der richtige Werth angenommen wird.

Man sieht dass dieser Fehler $f = 0$ wird, wenn $s = \sigma$ ist, also die $\mu$ fehlenden Beobachtungen dasselbe Mittel geben, als die verwendeten *m* Einzelwerthe.

Ein Extremfall wird der sein, dass $\sigma = 0$ ist, also die fehlenden Stationen absolut regenlos verlaufen sind. Das giebt

$$f = -100\,\frac{\mu}{m + \mu},$$

Am fehlerhaftesten können wir in der Reihe Spalte 43 die mittlere Menge für das Jahr 1864 erwarten. Hier war $m = 18$ und $\mu = 4$, also würde unter der Annahme $\sigma = 0$ $f = -18\,\%$ sein, es würde aber $f = +18\,\%$ sein, wenn $\sigma = 2\,s = 1084$ *mm* angenommen werden könnte. Beide Annahmen übersteigen weit die Grenzen, welche hier zu erwarten sind, und demnach kann man behaupten, dass die grössten Fehler in der Ordinatenreihe der *s* weit unter $\pm 18\,\%$ des betreffenden *s* bleiben müssen und dass solche Fehler in Anbetracht der Schwankungen der *s*, welche nahe $100\,\%$ des kleinsten Werthes betragen, nicht in Betracht kommen.

Herr Brückner wird aber leicht ebenso die bedeutenden Unsicherheiten berechnen können, welche seinen Ordinatenreihen anhaften, wenn er z. B. $m = 2$ und $\mu = 3$ setzt, was $100\,\frac{\mu}{m + \mu} = 60\,\%$ ergiebt.

Die *s* lassen sich aber leicht auf gleiche mittlere Höhe reduziren.

Sind $s_1\ s_2 \ldots\ldots s_n$ die Regenmengen in den Höhen $h_1\ h_2 \ldots\ldots h_n$, so ist nach Abschnitt II, Spalte 16 ff.

*) Geographisches Jahrbuch, Bd. XVII, 1894, Seite 360.

$$s_1 = a + b\,h_1 + \delta_1$$
$$s_2 = a + b\,h_2 + \delta_2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$s_n = a + b\,h_n + \delta_n$$
$$[s] = n\,a + b\,[h] + [\delta]$$
$$s = \frac{[s]}{n} = a + b\frac{[h]}{n} + \frac{[\delta]}{n}.$$

Die $\delta$ sind die Fehler, welche die Abweichungen der beobachteten Regenmengen vom Gesetz der proportionalen Zunahme mit der Höhe darstellen.

Je mehr dieses Gesetz gültig und je weniger anderweitige Gesetzmässigkeit anzunehmen ist, um so mehr wird $[\delta] = 0$ sein.

Setzt man für das Mittel der Höhen $[h] : n$ den Werth $h$, so ist

$$s = a + b\,h$$

oder in Worten:

„Bildet man die Mittel aus den auf gleichen Zeitraum bezüglichen Regenmengen, so ist dieses die Regenmenge, welche der Höhe zukommt, die das Mittel aus den verwendeten Stationen ergiebt."

Daraus folgt, dass die von mir in dem I. Klimaheft gegebenen Durchschnittswerthe aus den auf gleiche Zeit bezüglichen Messungen aller Stationen eine thatsächliche wohlbegründete Bedeutung haben, und muss ich deshalb die Ansicht des Herrn Dr. Ule*), dass es schade um die Arbeit zur Bildung dieser Durchschnitte gewesen sei, „da diese Werthe in Wirklichkeit nicht bestehen", als **unbegründet zurückweisen.**

Sie beziehen sich meist auf die Höhe von 370 *m*, und es können die Werthe, welche aus 18 statt 22 Einzelbeobachtungen gebildet wurden, höchstens um 18 % von denen verschieden sein, welche 22 Stationen ergeben haben würden, es muss aber diese Fehlergrenze im Allgemeinen als die thatsächlichen Fehler weit übersteigend angesehen werden.

Zur Reduktion der für die von 370 *m* verschiedene Höhe gefundenen $s$ auf erstere Höhe hat man die Gleichungen

$$s = a + b\,h$$
$$s' = a + b\,(370)$$

woraus

$$s' = s + b\,(370 - h) = s + b \cdot \Delta h$$

folgt. Nach dieser Formel wurden die $s'$ abgeleitet. Man findet auf Spalte 43 erst die Werthe $\Delta h = 370 - h$, die Höhenfaktoren $b$ (nach Tabelle A Spalte 16), die $\Delta s = b\,\Delta h$ und dann die $s'$. Man sieht, dass die grössten Werthe von $\Delta s$ höchstens 3 % der zugehörigen $s$ darstellen, und daraus ergiebt sich, dass das von mir gegen Herrn Brückner aufgestellte Material doch wohl nicht „so wenig werth" ist, als dieser Herr es meint.

Die korrektere Zahlenreihe der $s'$ spricht sogar noch mehr gegen Herrn Brückner, da für 1864 und die folgenden Jahre kleinere Werthe herauskommen, während sich für 1894 ein grösserer Werth ergiebt. —

Nach dem Inhalt dieses Abschnittes würde ich zu der Behauptung berechtigt sein, dass die von Herrn Brückner und seinen Vorgängern behauptete Periodizität der Regenmengen überhaupt nicht existirt, dass die Abweichungen von dem vieljährigen Mittel rein zufällig auftreten und es unmöglich ist, einen irgend wie sicher begründeten Schluss auf die weitere Gestaltung der Regenverhältnisse der künftigen Jahre aus den bisherigen Beobachtungen zu ziehen.

Es treten aber doch Einzelheiten auf, welche eine weitere Prüfung dieser Frage zur Pflicht machen. Ich stelle dieser eine theoretische Untersuchung der Gruppenmittelbildung vor, da dieses Verfahren vielfach angewendet worden ist und wird, ohne dass man sich bisher Rechenschaft gegeben hat, was man eigentlich macht und welchen Einfluss das Rechenverfahren auf die Funktion hat, deren Ableitung man bezweckt.

Ich glaube, dass die korrekte Durchführung der Gruppenmittelbildung sehr segensreich für die Meteorologie und andere Wissenschaften werden kann und dass sie der Gegenstand der Ausbildung durch junge Gelehrte sein sollte. Was ich hier gebe, kann nur eine Anregung sein, ich halte die Sache damit noch nicht für abgeschlossen.

## Abschnitt VI.

## Die Ermittelung periodischer Funktionen aus Beobachtungen durch Gruppenmittel.

### Kapitel 1.

### Feststellung der Aufgabe.

Zu den Abszissen

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \cdots x_k \cdots x_n$$

sollen die durch Beobachtung gefundenen Ordinaten einer Kurve

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \cdots y_k \cdots y_n$$

gehören.

Die $y$ sollen aus zwei Theilen derart bestehen, dass

$$y_k = a_k + \delta_k = f(x_k) + \delta_k$$

ist.

Wir setzen voraus, dass durch die Gleichung

$$a = f(x)$$

die volle Gesetzmässigkeit der durch die $y$ gegebenen Erscheinung ausgedrückt werde, so dass die $\delta$ den Charakter der zufälligen Fehler haben.

Man wird zuerst zu untersuchen haben, ob die $a$ als konstant anzunehmen sind, also

$$f(x) = \text{Konst.}$$

ist.

Es werden also alle die Erörterungen vorzunehmen sein, welche im III. Abschnitt ausführlich behandelt worden sind.

Kommt man hierbei zu dem Resultat, dass die Annahme $f(x) =$ Konst. nicht zulässig ist, so wird die Aufgabe entstehen, die $f(x)$ in irgend welcher Weise, als geschlossenen Ausdruck, oder in Form einer Reihe oder auch graphisch darzustellen.

*) Petermann's Geographische Mittheilungen 1894, Literaturbericht, Seite 149.

## Kapitel 2.

### Die Herleitung von $f(x)$ in Form einer Reihe.

In geschlossener Form wird $f(x)$ nur dann hergeleitet werden können, wenn man den Funktionsverlauf auf Grund theoretischer Betrachtungen festzustellen vermag; die Darstellung als Reihe wird aber stets möglich sein. So wie man aus irgend welchem Grunde annehmen kann, dass es sich um eine periodische Funktion handelt, wird natürlich die Darstellung mittelst der Bessel'schen Formel (Fourier'sche Reihen) gewählt werden, durch die ja jede beliebige auch nicht periodische Funktion darstellbar ist. Besonders einfach wird weiter die Sache werden, wenn die Periodenlänge der Funktion bekannt ist, wie dies hier vorausgesetzt werden soll.

Es soll dieselbe gleich $l$ sein

Wenn wir dann

$$w = \frac{2\pi}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

setzen, so lässt sich $f(x)$ durch die Reihe

$$\left.\begin{aligned} f(x) = a_0 &+ a_1 \cos 1 \cdot wx + a_2 \cos 2 \cdot wx + \ldots \\ &+ a_m \cos mwx + \ldots \\ &+ b_1 \sin 1 \cdot wx + b_2 \sin 2 \cdot wx + \ldots \\ &+ b_m \sin mwx + \ldots \end{aligned}\right\} . \quad (2)$$

darstellen.

Diese Formel hat die Eigenschaft, dass sie sich von

$$0 - l,\ l - 2l,\ 2l - 3l \text{ u. s. w.}$$

wiederholt und für die Abszissen

$$x,\ x + l,\ x + 2l \text{ u. s. w.}$$

stets dieselben Funktionswerthe liefert.

Die Koeffizienten $a$ und $b$ sind hierin durch die bestimmten Integrale

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos mwx\, dwx = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \cos mwx\, dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin mwx\, dwx = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \sin mwx\, dx \end{aligned}\right\} . \quad (3)$$

gegeben.

Ueber die Bestimmungsweise der Koeffizienten der Bessel'schen Gleichung habe ich eine sehr ausführliche Darstellung in den „Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher“*) gegeben, auf die ich hier verweise.

Ich will hier nur erwähnen, dass die Integration direkt nicht möglich ist, da der geschlossene Ausdruck für $f(x)$ fehlt. Es können also nur die Näherungsmethoden eintreten, wobei man sich der durch Beobachtung gegebenen Ordinaten $y$ bedient und die Integrale entweder in Summen verwandelt oder mechanische Flächenbestimmungen ausführt.

*) Untersuchung über das Wesen der sogenannten Bessel'schen Formel etc. 1892, Band LVIII, Nr. 3. In Kommission bei W. Engelmann, Leipzig.

Sind die $y$ äquidistant und von gleicher Genauigkeit, so laufen alle Methoden der angenäherten Integration auf die Verfahren hinaus, welche die Behandlung der Aufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert, und erhält man somit direkt die wahrscheinlichsten Werthe der $a$ und $b$ derart, dass die Quadratsummen der $\delta$ Minimalwerthe haben.

## Kapitel 3.

### Die Integralmittel-Kurve.

Wenn die Gleichung für $f(x)$ in irgend einer Form gegeben ist, lässt sich leicht der Ausdruck

$$\eta = \frac{1}{x_{k+\Delta} - x_k}\int_{x_k}^{x_{k+\Delta}} f(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bilden, wobei also $\eta$ die Höhe des Rechteckes darstellt, welches bei einer Länge $(x_{k+\Delta} - x_k)$ denselben Flächeninhalt hat, als die durch die Ordinaten $f(x_{k+\Delta})$ und $f(x_k)$ sowie die Stücken der Kurve und der Abszissenachse zwischen beiden begrenzte Fläche.

Nimmt man an, dass $f(x)$ durch die unter 2 angegebene Sinus-Cosinusreihe gegeben ist, so wird die Ausführung der obigen Integration auf die Bestimmung der allgemeinen Integrale

$$\int \cos mwx\, dx \text{ und } \int \sin mwx\, dx$$

hinauslaufen. Man erhält durch einfache Rechnung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x_{k+\Delta} - x_k}\, a_m \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos mwx\, dx = \\ &= a_m \frac{\sin \frac{m\Delta}{l}\pi}{\frac{m\Delta}{l}\pi} \cos mw\xi = a_m \cos mw\xi \end{aligned}\right\} . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x_{k+\Delta} - x_k}\, b_m \int_{x_k}^{x_{k+\Delta}} \sin mwx\, dx = \\ &= b_m \frac{\sin \frac{m\Delta}{l}\pi}{\frac{m\Delta}{l}\pi} \sin mw\xi = \beta_m \sin mw\xi \end{aligned}\right\} . \quad (6)$$

worin

$$\Delta = x_{k+\Delta} - x_k \text{ und } \xi = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+\Delta}) . \quad (7)$$

sowie

$$a_m = a_m \frac{\sin \frac{m\Delta}{l}\pi}{\frac{m\Delta}{l}\pi} \qquad \beta_m = b_m \frac{\sin \frac{m\Delta}{l}\pi}{\frac{m\Delta}{l}\pi} \quad . \quad (8)$$

gesetzt sind.

Nunmehr kann der Ausdruck für $\eta$ ohne Weiteres hingeschrieben werden, man hat in den Formeln 8 für $m$ nun der Reihe nach 0, 1, 2 . . . zu setzen. Dies giebt

$$\left.\begin{aligned}\eta = a_0 &+ a_1 \cos 1 \cdot w\xi + a_2 \cos 2 \cdot w\xi + \ldots \\ &+ a_m \cos m \cdot w\xi + \ldots \\ &+ \beta_1 \sin 1 \cdot w\xi + \beta_2 \sin 2 \cdot w\xi + \ldots \\ &+ \beta_m \sin m \cdot w\xi + \ldots\end{aligned}\right\} . \quad (9)$$

Denkt man sich nun die Werthe $\eta$ für die Abszissen

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(x_{-\frac{1}{2}\Delta} + x_{+\frac{1}{2}\Delta}\right),\ \xi_1 = \frac{1}{2}\left(x_{-\frac{1}{2}\Delta+1} + x_{+\frac{1}{2}\Delta+1}\right) \quad (10)$$

u. s. w. berechnet, bezeichnet diese mit

$$\eta_0,\ \eta_1 \text{ u. s. w.}$$

und trägt sie als Ordinaten derart auf, dass der Koordinatenanfang für die $\xi$ derselbe ist als für die $x$, so erhält man eine neue Kurve, die als die Integralmittel-Kurve bezeichnet werden kann. Die Gestaltung dieser Kurve wird durch das Verhältniss der Grössen $\Delta$ und $l$ bedingt.

Ist

1) $\Delta$ sehr klein gegen $l$ und reichen zur Darstellung der $f(x)$ nur wenige Glieder der Reihe aus, so dass auch $m$ keinen grossen Werth haben kann, so wird $\sin \frac{m\Delta}{l}\pi$ mit $\frac{m\Delta}{l}\pi$ vertauscht werden können; man erhält

$$a_m = a_m,\ \beta_m = b_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und die Integralmittel-Kurve wird sich um so mehr der durch $f(x)$ gegebenen Kurve anschmiegen, je mehr die genannte Annahme zulässig ist.

Einen einfachen Ausdruck erhält man

2) wenn $\Delta = \frac{1}{2} l$ angenommen wird. Die Gleichung der Integralmittel-Kurve wird alsdann

$$\left.\begin{aligned}\eta = a_0 &+ \frac{2a_1}{\pi}\cos w\xi - \frac{2}{3}\frac{a_3}{\pi}\cos 3w\xi \\ &+ \frac{2}{5}\frac{a_5}{\pi}\cos 5w\xi - \ldots \\ &+ \frac{2b_1}{\pi}\sin w\xi - \frac{2}{3}\frac{b_3}{\pi}\sin 3w\xi \\ &+ \frac{2}{5}\frac{b_5}{\pi}\sin 5w\xi - \ldots\end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

Wird endlich

3) $\Delta = l$ angenommen, so wird

$$\eta = a_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die Integralmittel-Kurve geht also in eine zur Abszissenachse parallele Gerade über.

## Kapitel 4.

### Die Verwendung der Integralmittel-Kurven bei der Analyse mehrfach periodischer Funktionen.

Die uns gegebene periodische Erscheinung möge derart beschaffen sein, dass

$$y = y' + y'' + y''' + \ldots . \quad . \quad . \quad (14)$$

ist.

Durch die Ordinatenreihe der $y'$ soll eine periodische Kurve von der Periodenlänge $l_1$ dargestellt werden, während die $y''$ zu einer Kurve von der Periodenlänge $l_2$ und die $y'''$ zu einer solchen von der Periodenlänge $l_3$ gehören u. s. w.

Durch Zusammensetzung der zu einer Abszisse $x$ gehörigen $y'$, $y''$, $y'''$ u. s. w. soll alsdann die Ordinate $y$ entstanden sein.

Wir denken uns also, dass die Werthe $y$ durch Beobachtung gegeben sind und dass wir von den Theilkurven nur die Periodenlängen kennen.

Führt man die Bezeichnungen

$$w_1 = \frac{2\pi}{l_1} \quad w_2 = \frac{2\pi}{l_2} \quad w_3 = \frac{2\pi}{l_3} \ldots . \quad . \quad (15)$$

ein, so folgt (wenn von der Fehlerrechnung zunächst abgesehen wird) nach den Kap. 2 und 3:

$$\left.\begin{aligned}y = \quad & a'_0 + a''_0 + a'''_0 + \ldots \\ &+ a'_1 \cos 1 \cdot w_1 x + a''_1 \cos 1 \cdot w_2 x + a'''_1 \cos 1 \cdot w_3 x + \ldots \\ &+ a'_2 \cos 2 \cdot w_1 x + a''_2 \cos 2 \cdot w_2 x + a'''_2 \cos 2 \cdot w_3 x + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a'_m \cos m \cdot w_1 x + a''_m \cos m \cdot w_2 x + a'''_m \cos m \cdot w_3 x + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ b'_1 \sin 1 \cdot w_1 x + b''_1 \sin 1 \cdot w_2 x + b'''_1 \sin 1 \cdot w_3 x + \ldots \\ &+ b'_2 \sin 2 \cdot w_1 x + b''_2 \sin 2 \cdot w_2 x + b'''_2 \sin 2 \cdot w_3 x + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ b'_m \sin m \cdot w_1 x + b''_m \sin m \cdot w_2 x + b'''_m \sin m \cdot w_3 x + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} . \quad (16)$$

sowie auch

$$\left.\begin{aligned}\eta = \quad & a'_0 + a''_0 + a'''_0 + \ldots \\ &+ a'_1 \cos 1 \cdot w_1 \xi + a''_1 \cos 1 \cdot w_2 \xi + a'''_1 \cos 1 \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ a'_2 \cos 2 \cdot w_1 \xi + a''_2 \cos 2 \cdot w_2 \xi + a'''_2 \cos 2 \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a'_m \cos m \cdot w_1 \xi + a''_m \cos m \cdot w_2 \xi + a'''_m \cos m \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \beta'_1 \sin 1 \cdot w_1 \xi + \beta''_1 \sin 1 \cdot w_2 \xi + \beta'''_1 \sin 1 \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ \beta'_2 \sin 2 \cdot w_1 \xi + \beta''_2 \sin 2 \cdot w_2 \xi + \beta'''_2 \sin 2 \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \beta'_m \sin m \cdot w_1 \xi + \beta''_m \sin m \cdot w_2 \xi + \beta'''_m \sin m \cdot w_3 \xi + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} . \quad (17)$$

Zwischen den Koeffizienten $a$ und $b$ der Grundkurve und den $\alpha$ und $\beta$ der Integralmittel-Kurve bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a'_m &= a'_m \frac{l_1}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_1} & \beta'_m &= b'_m \frac{l_1}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_1} \\ a''_m &= a''_m \frac{l_2}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_2} & \beta''_m &= b''_m \frac{l_2}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_2} \\ a'''_m &= a'''_m \frac{l_3}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_3} & \beta'''_m &= b'''_m \frac{l_3}{m\Delta\pi}\sin\frac{m\Delta\pi}{l_3} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

. . . . . .

Um das Verfahren zu entwickeln, durch welches man aus der gegebenen Reihe der $y$ die Einzelkurven ableiten kann, soll hier der Einfachheit halber angenommen werden, dass die Grundkurve durch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} y = a_0 &+ a' \cos w_1 x + a'' \cos w_2 x + a''' \cos w_3 x \\ &+ b' \sin w_1 x + b'' \sin w_2 x + b''' \sin w_3 x \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

darstellbar sei.

Die Integralmittel-Kurve hat dann die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &+ a' \cos w_1 \xi + a'' \cos w_2 \xi + a''' \cos w_3 \xi \\ &+ \beta' \sin w_1 \xi + \beta'' \sin w_2 \xi + \beta''' \sin w_3 \xi \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} a' &= a'\frac{l_1}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_1} & a'' &= a''\frac{l_2}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_2} & a''' &= a'''\frac{l_3}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_3} \\ \beta' &= b'\frac{l_1}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_1} & \beta'' &= b''\frac{l_2}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_2} & \beta''' &= b'''\frac{l_3}{\Delta\pi}\sin\frac{\Delta\pi}{l_3} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

sein werden.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\lambda_1 = \frac{\Delta\pi}{l_1} \quad \lambda_2 = \frac{\Delta\pi}{l_2} \quad \lambda_3 = \frac{\Delta\pi}{l_3} \quad . \quad . \quad (22)$$

und erhalten so

$$\left.\begin{aligned} a' &= a' \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1} & a'' &= a'' \frac{\sin\lambda_2}{\lambda_2} & a''' &= a''' \frac{\sin\lambda_3}{\lambda_3} \\ \beta' &= b' \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1} & \beta'' &= b'' \frac{\sin\lambda_2}{\lambda_2} & \beta''' &= b''' \frac{\sin\lambda_3}{\lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

I. Schritt.

Es wird

$$\Delta = l_1$$

gemacht, was

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \pi & \lambda_2 &= \frac{l_1}{l_2}\pi & \lambda_3 &= \frac{l_1}{l_3}\pi \\ a' &= 0 & a'' &= a'' \frac{\sin\lambda_2}{\lambda_2} & a''' &= a''' \frac{\sin\lambda_3}{\lambda_3} \\ \beta' &= 0 & \beta'' &= b'' \frac{\sin\lambda_2}{\lambda_2} & \beta''' &= b''' \frac{\sin\lambda_3}{\lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (24)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &+ a'' \cos w_2 \xi + a''' \cos w_3 \xi \\ &+ \beta'' \sin w_2 \xi + \beta''' \sin w_3 \xi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (25)$$

ergiebt.

II. Schritt.

Es wird aus der ersten Integralmittel-Kurve eine zweite gebildet:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = a_0 &+ (a)'' \cos w_2 \zeta + (a)''' \cos w_3 \zeta \\ &+ (\beta)'' \sin w_2 \zeta + (\beta)''' \sin w_3 \zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad (26)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} (a)'' &= a'' \frac{\sin(\lambda)_2}{(\lambda)_2} & (a)''' &= a''' \frac{\sin(\lambda)_3}{(\lambda)_3} \\ (\beta)'' &= \beta'' \frac{\sin(\lambda)_2}{(\lambda)_2} & (\beta)''' &= \beta''' \frac{\sin(\lambda)_3}{(\lambda)_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (27)$$

und

$$(\lambda)_2 = \frac{(\Delta)\pi}{l_2} \qquad (\lambda)_3 = \frac{(\Delta)\pi}{l_4}$$

sind. Wird hierin weiter

$$(\Delta) = l_2$$

gemacht, so wird

$$\left.\begin{aligned} (\lambda)_2 &= \pi & (\lambda)_3 &= \frac{l_2}{l_3}\pi \\ (a)'' &= 0 & (a)''' &= a''' \frac{\sin(\lambda)_3}{(\lambda)_3} \\ (\beta)'' &= 0 & (\beta)''' &= \beta''' \frac{\sin(\lambda)_3}{(\lambda)_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

woraus folgt

$$\vartheta = a_0 + (a)''' \cos w_3 \zeta + (\beta)''' \sin w_3 \zeta \quad . \quad (29)$$

Somit erhält man 3 Kurven, von denen die Grundkurve die Periodenlängen $l_1$, $l_2$ und $l_3$, die erste Integralmittel-Kurve $l_2$ und $l_3$, die zweite Integralmittel-Kurve nur $l_3$ enthält.

Aus der Kurve der $\vartheta$ lassen sich die Koeffizienten $a_0$, $(a)'''$ und $(\beta)'''$ bestimmen nach den Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} \vartheta\, d\zeta \\ (a)''' &= \frac{2}{l_3}\int_0^{l_3} \vartheta \cos w_3 \zeta\, d\zeta \\ (\beta)''' &= \frac{2}{l_3}\int_0^{l_3} \vartheta \sin w_3 \zeta\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Hieraus erhält man

$$a''' = (a)''' \frac{(\lambda)_3}{\sin(\lambda)_3} \quad \beta''' = (\beta)''' \frac{(\lambda)_3}{\sin(\lambda)_3} \quad . \quad (31)$$

Diese Werthe verwendet man, um aus der ersten Integralmittel-Kurve eine Kurve von der Form

$$\left.\begin{aligned} (\eta) &= \eta - a_0 - a''' \cos w_3 \xi - \beta''' \sin w_3 \xi \\ &= a'' \cos w_2 \xi + \beta'' \sin w_2 \xi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (32)$$

herzuleiten, welche nur die Periodenlänge $l_2$ enthält und

$$a'' = \frac{2}{l_2}\int_0^{l_2} (\eta) \cos w_2 \xi\, d\xi \quad \beta'' = \frac{2}{l_2}\int_0^{l_2} (\eta) \sin w_2 \xi\, d\xi \quad . \quad (33)$$

ergiebt.

Jetzt geht man auf die Grundkurve zurück.

Man erhält zunächst

$$\left.\begin{aligned} a'' &= \alpha'' \frac{\lambda_2}{\sin \lambda_2} & b'' &= \beta'' \frac{\lambda_2}{\sin \lambda_2} \\ a''' &= \alpha''' \frac{\lambda_3}{\sin \lambda_3} & b''' &= \beta''' \frac{\lambda_3}{\sin \lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

oder

$$a''' = (\alpha)''' \frac{(\lambda)_3}{\sin (\lambda)_3} \cdot \frac{\lambda_3}{\sin \lambda_3} \quad b''' = (\beta)''' \frac{(\lambda)_3}{\sin (\lambda)_3} \cdot \frac{\lambda_3}{\sin \lambda_3}$$

und damit eine Kurve

$$\left.\begin{aligned} (y) &= y - a_0 - a'' \cos w_2 x - a''' \cos w_3 x \\ &\quad - b'' \sin w_2 x - b''' \sin w_3 x \\ &= a' \cos w_1 x + b' \sin w_1 x \end{aligned}\right\} . \quad (35)$$

Diese ergiebt

$$a' = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (y) \cos w_1 x \, dx \quad b' = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (y) \sin wx \, dx \; . \quad (36)$$

Somit sind alle Koeffizienten bestimmt und kann man die drei Funktionen

$$\begin{aligned} y' &= a_0 + a' \cos w_1 x + b' \sin w_1 x \\ y'' &= \quad a'' \cos w_2 x + b'' \sin w_2 x \\ y''' &= \quad a''' \cos w_3 x + b''' \sin w_3 x \end{aligned}$$

angeben. Allerdings können die $a_0$ nicht getrennt werden und kann dies unter Umständen auch bei einigen anderen Koeffizienten nicht möglich sein.

## Kapitel 5.

### Die Gruppenmittel-Kurven gebildet aus äquidistanten Ordinaten in dem Abstand 1.

Wir schreiben die Reihe der beobachteten Ordinaten folgendermaassen:

$$y_{-n},\ y_{-(n-1)},\ \ldots\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},\ y,\ y_{+1},\ y_{+2},\ y_{+3},\ \ldots\ y_{+(n-1)},\ y_{+n}$$

und die zugehörigen Abszissen

$$x_{-n},\ \ldots\ x_{-1},\ x,\ x_{+1},\ \ldots\ x_{+n}.$$

Aus den gegebenen $2n + 1$ Ordinaten kann man ein Gruppenmittel nach der Formel

$$\eta = \frac{py + p_1 (y_{-1} + y_{+1}) + p_2 (y_{-2} + y_{+2}) + \ldots + p_n (y_{-n} + y_{+n})}{p + 2p_1 + 2p_2 + \ldots\ldots + 2p_n} \quad (37)$$

bilden, worin die $p$ gewisse Zahlenwerthe, meist ganze Zahlen darstellen.

Wenn man nun für $y$ nach und nach alle gegebenen Werthe nimmt, soweit dies der durch $n$ gegebene Gruppenumfang gestattet, also jedes $y$ mit den $n$ rechts und $n$ links äquidistant anstehenden Ordinaten zu einem Gruppenmittel nach der angegebenen Formel vereinigt, so erhält man eine Reihe von Ordinaten $\eta$, welche mit den Stellenzeichen der mittleren Ordinaten zu versehen sind und bei Auftragung über die diesen entsprechenden Abszissen gestellt werden können.

Eine auf diese Weise erhaltene Kurve möge eine Gruppenmittel-Kurve genannt werden.

Man wird hier eine wesentliche Abkürzung der Formeln durch das Einführen der folgenden Bezeichnungen

$$[p] = p + 2p_1 + 2p_2 + \ldots\ldots + 2p_n \; . \quad (38)$$

$$g = p : [p],\ g_1 = p_1 : [p],\ g_2 = p_2 : [p], \ldots, g_n = p_n : [p] \quad (39)$$

erhalten. Die $g$ wird man als die Gewichte bezeichnen können, womit die einzelnen $y$ in die Mittelbildung eingehen, und es wird zweifellos

$$g + 2g_1 + 2g_2 + \ldots\ldots + 2g_n = 1 \quad . \quad (40)$$

sein.

Im Kapitel 1 wurde festgestellt, dass jedes $y$ sich aus zwei Theilen zusammensetzt, aus einem durch $f(x)$ gegebenen gesetzmässigen Werth und einem zufälligen Fehler $\delta$.

Nehmen wir an, dass $f(x)$ periodisch mit der Periodenlänge $l$ verläuft, so wird man für den zu einem $y$ gehörigen Gruppenmittelwerth unter Anwendung der Bezeichnungsweise im Kapitel 2 folgenden Ausdruck aufstellen können:

$$\left.\begin{aligned} \eta = {} & gy + g_1 (y_{-1} + y_{+1}) + \ldots\ldots + g_n (y_{-n} + y_{+n}) = \\ & g a_0 \quad + g_1 \cdot 2 a_0 \quad\quad\quad\quad + \ldots + g_n \cdot 2 a_0 \\ & + g a_1 \cos 1 wx + g_1 [\cos 1 w(x-1) + \cos 1 w(x+1)] + \ldots + g_n [\cos 1 \cdot w(x-n) + \cos 1 \cdot w(x+n)] \\ & + g a_2 \cos 2 wx + g_1 [\cos 2 w(x-1) + \cos 2 w(x+1)] + \ldots + g_n [\cos 2 \cdot w(x-n) + \cos 2 \cdot w(x+n)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g a_m \cos m wx + g_1 [\cos m w(x-1) + \cos m w(x+1)] + \ldots + g_n [\cos m \cdot w(x-n) + \cos m w(x+n)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g b_1 \sin 1 wx + g_1 [\sin 1 w(x-1) + \sin 1 w(x+1)] + \ldots + g_n [\sin 1 \cdot w(x-n) + \sin 1 \cdot w(x+n)] \\ & + g b_2 \sin 2 wx + g_1 [\sin 2 w(x-1) + \sin 2 w(x+1)] + \ldots + g_n [\sin 2 \cdot w(x-n) + \sin 2 \cdot w(x+n)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g b_m \sin m wx + g_1 [\sin m w(x-1) + \sin m w(x+1)] + \ldots + g_n [\sin m \cdot w(x-n) + \sin m \cdot w(x+n)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g\delta \quad\quad\quad + g_1 (\delta_{-1} + \delta_{+1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + g_n (\delta_{-n} + \delta_{+n}) \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wesentlich vereinfachen. Man findet leicht die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \cos mw(x-n) + \cos mw(x+n) &= 2 \cdot \cos mnw \cos mwx \\ \sin mw(x-n) + \sin mw(x+n) &= 2 \cdot \sin mnw \sin mwx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

und erhält damit

$$\left.\begin{aligned}
&\eta = \\
&a_0\,(g + 2g_1 + 2g_2 + \ldots . 2g_n) \\
&+ a_1\,[g + 2g_1 \cos 1\cdot 1w + 2g_2 \cos 1\cdot 2w + \ldots + 2g_n \cos 1\cdot nw] \cos 1wx \\
&+ a_2\,[g + 2g_1 \cos 2\cdot 1w + 2g_2 \cos 2\cdot 2w + \ldots + 2g_n \cos 2\cdot nw] \cos 2wx \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_m[g + 2g_1 \cos m\,1w + 2g_2 \cos m\cdot 2w + \ldots + 2g_n \cos m\cdot nw] \cos mwx \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ b_1\,[g + 2g_1 \sin 1\cdot 1w + 2g_2 \sin 1\cdot 2w + \ldots + 2g_n \sin 1\cdot nw] \sin 1wx \\
&+ b_2\,[g + 2g_1 \sin 2\cdot 1w + 2g_2 \sin 2\cdot 2w + \ldots + 2g_n \sin 2\cdot nw] \sin 2wx \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ b_m[g + 2g_1 \sin m\cdot 1w + 2g_2 \sin\ m\ 2w + \ldots + 2g_n \sin m\cdot nw] \sin mwx \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ g\delta + g_1(\delta_{-1} + \delta_{+1}) + g_2(\delta_{-2} + \delta_{+2}) + \ldots + g_n(\delta_{-n} + \delta_{+n})
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (43)$$

Führt man die Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned}
s_m = [&g + 2g_1 \cos m\cdot w + 2g_2 \cos m\cdot 2w + \ldots \\
&+ 2g_n \cos m\cdot nw]
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

ein, so ergiebt sich für $\eta$ der sehr einfache Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}
\eta = a_0 &+ s_1 a_1 \cos 1\cdot wx + s_2 a_2 \cos 2\cdot wx + \ldots . \\
&+ s_m a_m \cos mwx + \ldots \\
&+ s_1 b_1 \sin 1\cdot wx + s_2 b_2 \cos 2\cdot wx + \ldots . \\
&+ s_m b_m \sin mwx + \ldots \\
+ g\delta &+ g_1(\delta_{-1} + \delta_{+1}) + g_2(\delta_{-2} + \delta_{+2}) + \ldots . \\
&+ g_n(\delta_{-n} + \delta_{+n})
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Wir können hier einige besondere Annahmen über $n$ und die Gewichte eingehender besprechen.

### I. Annahme.

Es sei

$$p = p_1 = p_2 \ldots . = p_{n-1} = 1, \text{ aber } p_n = \frac{1}{2}.$$

Dies ergiebt also die Formel der Mittelbildung

$$\left.\begin{aligned}
\eta = &\frac{\frac{1}{2}y_{-n} + y_{-(n-1)} + \ldots . + y_{-2} + y_{-1} + y}{2n} \\
&\frac{+ y_{+1} + y_{+2} + \ldots . + y_{+(n-1)} + \frac{1}{2}y_{+n}}{2n} \\
= &\frac{[y]_{-(n-1)}^{+(n-1)} + \frac{1}{2}(y_{-n} + y_{+n})}{2n}
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Weiter erhalten wir

$$g = g_1 = g_2 = \ldots . = g_{n-1} = \frac{1}{2n},\ g_n = \frac{1}{4n}. \quad (47)$$

Werden diese Ausdrücke in die Formel 44 eingesetzt, so folgt nach einigen einfachen Umrechnungen

$$\left.\begin{aligned}
s_m &= \frac{1}{2n} \cdot \sin mn w \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} mw \\
&= \frac{\sin \frac{m\cdot 2n}{l}\pi}{2n \operatorname{tg} \frac{m}{l}\pi}
\end{aligned}\right\} \ldots (48)$$

Der Zahlenwerth von $s_m$ wird von $m$ und $n$ abhängig sein, also von der Ordnung des Gliedes in der Bessel'schen Formel, zu dem er gehört, und der Zahl der Ordinaten, welche zum Gruppenmittel zusammengefasst werden. Der Werth von $s_m$ liegt zwischen Null und Eins. Das Erstere findet statt, wenn

1. $l = 2n$ gemacht wird und ist alsdann

$$\eta = a_0 + \left[[\delta]_{-(n-1)}^{+(n-1)} + \frac{1}{2}(\delta_{-n} + \delta_{+n})\right] : 2n\ . \quad (49)$$

Wenn aber

2. $m$ und $n$ sehr klein gegen $l$ sind, so wird

$$s_m = 1 \ldots\ldots\ldots (50)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\eta\quad &a_0 + a_1 \cos 1wx + a_2 \cos 2wx + \ldots + a_m \cos mwx + \ldots \\
&+ b_1 \sin 1wx + b_2 \sin 2wx + \ldots + b_m \sin mwx + \ldots \\
&+ \left[[\delta]_{-(n-1)}^{+(n-1)} + \frac{1}{2}(\delta_{-n} + \delta_{+n})\right] : 2n
\end{aligned}\right\} (51)$$

Bemerkenswerth ist der Fall, wo nur $m$ als klein gegen $l$ erscheint, wo also die Funktion durch nur wenig Glieder der Reihe dargestellt werden kann.

Alsdann kann $\operatorname{tg} \frac{m}{l}\pi$ mit dem Bogen vertauscht werden und es wird

$$s_m = \frac{\sin \frac{m\cdot 2n}{l}\pi}{\frac{m\cdot 2n}{l}\pi} \ldots\ldots (52)$$

Da $2n$ die Länge des Flächenstückes ist, dessen Ordinaten in das Gruppenmittel eingehen, so wird es identisch mit dem Werth $A$ in Formel 8 sein und es ergiebt sich für die Gruppenmittel-Kurve nahezu genau derselbe Ausdruck wie für die Integralmittel-Kurve.

Es muss dies ja sein, da der vorliegende Fall das korrekte Verfahren der angenährten Integration darstellt und um so genauere Resultate ergiebt, je weniger die zwischen zwei einander folgenden Ordinaten liegenden Kurvenstücke von der geraden Linie abweichen.

### II. Annahme.

Es sei

$$p = p_1 = p_2 = \ldots . p_n = 1, \text{ also } [p] = 2n + 1$$

und

$$\eta = [y]_{-n}^{+n} : (2n+1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Wir erhalten

$$g = g_1 = g_2 = \ldots . g_n = \frac{1}{2n+1} \quad . \quad . \quad (54)$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} s_m &= \frac{1}{2n+1}\left\{\sin\, n\,m\,w\ \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,m w + \cos\, n\,m\,w\right\} \\ &= \frac{1}{2n+1}\left\{\sin\frac{m\cdot 2n}{l}\pi\ \operatorname{cotg}\frac{m}{l}\pi + \cos\frac{m\cdot 2n}{l}\pi\right\} \end{aligned}\right\} (55)$$

Wir können hier dieselben Grenzfälle wie bei der ersten Annahme behandeln.

1. Es sei $l = 2n$.

Alsdann wird

$$s_m = \frac{1}{2n+1}\left\{\sin\, m\pi \cdot \operatorname{cotg}\frac{m}{2n}\pi + \cos\, m\pi\right\} . \quad (56)$$

Hierin ist zwar $\sin m\pi = 0$, aber $\cos m\pi$ hat je nach dem Werth von $m$ die Grösse $+1$ oder $-1$.

Es wird also der Ausdruck für $\eta$:

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &- \frac{1}{2n+1}\,a_1 \cos 1\,wx + \frac{1}{2n+1}\,a_2 \cos 2\,wx \\ &- \frac{1}{2n+1}\,a_3 \cos 3\,wx + \ldots \\ &- \frac{1}{2n+1}\,b_1 \sin 1\cdot wx + \frac{1}{2n+1}\,b_2 \sin 2\,wx \\ &- \frac{1}{2n+1}\,b_3 \sin 3\,wx + \ldots \\ &+ [\delta]_{-n}^{+n} : (2n+1) \end{aligned}\right\} (57)$$

2. Es sollen $m$ und $n$ als sehr klein gegen $l$ angenommen werden.

Alsdann wird

$$\cos\frac{m\cdot 2n}{l}\pi = +1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

und

$$\operatorname{cotg}\frac{m}{l}\pi = \frac{l}{m\pi},$$

was wieder

$$s_m = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &+ a_1 \cos 1\,wx + a_2 \cos 2\,wx + \ldots \\ &+ b_1 \sin 1\,wx + b_2 \sin 2\,wx + \ldots \\ &+ [\delta]_{-n}^{+n} : (2n+1) \end{aligned}\right\} . \quad (60)$$

liefert.

Betrachtet man nur $m$ als klein gegen $l$, so erhält man

$$s_m = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\sin\frac{m\cdot 2n}{l}\pi}{\frac{m\cdot 2n}{l}\pi} + \frac{\cos\frac{m\cdot 2n}{l}\pi}{2n+1} \quad . \quad (61)$$

Wird hier $2n$ einigermaassen gross gewählt, so nähert sich $2n:(2n+1)$ der Eins und das zweite Glied von $s_m$ der Null, so dass alsdann wieder die Gruppenmittel-Kurve nahe denselben Verlauf hat, wie die Integralmittel-Kurve.

## III. Annahme.

Von den vielen namentlich bei meteorologischen Untersuchungen gebrauchten Formeln sollen hier nur die von dem verdienten Direktor der Sternwarte in Breslau, Prof. Galle, gegebenen erörtert werden. Man findet die Begründung derselben im Jahrgang 1879 der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie (Band XIV, Seite 380 ff.).

Die Formeln sind

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\ \eta &= \frac{1}{40}\left\{\begin{aligned} &12y + 9(y_{-1}+y_{+1}) + 4(y_{-2}+y_{+2}) \\ &\qquad + 1(y_{-3}+y_{+3})\end{aligned}\right\}, n=3 \\ \text{b)}\ \eta &= \frac{1}{10}\left\{4y + 2(y_{-1}+y_{+1}) + 1(y_{-2}+y_{+2})\right\}, n=2 \\ \text{c)}\ \eta &= \frac{1}{10}\left\{4y + 3(y_{-1}+y_{+2})\right\}, \qquad n=1 \end{aligned}\right\} (62)$$

Wir haben zunächst die Ausdrücke für $s_m$ zu bilden und in die Formel 44

$$s_m = g + 2g_1 \cos 1\cdot m w + 2g_2 \cos 2\cdot m w + 2g_3 \cos 3\cdot m w + \ldots$$

die Werthe

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\quad & g = \frac{12}{40}\ g_1 = \frac{9}{40}\ g_2 = \frac{4}{40}\ g_3 = \frac{1}{40} \\ \text{b)}\quad & g = \frac{4}{40}\ g_1 = \frac{2}{40}\ g_2 = \frac{1}{40} \\ \text{c)}\quad & g = \frac{4}{40}\ g_1 = \frac{3}{40} \end{aligned}\right\} . \quad (63)$$

einzusetzen, wodurch wir

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\ s_m &= \frac{12}{40} + \frac{18}{40}\cos 1\cdot m w + \frac{8}{40}\cos 2\cdot m w \\ &\qquad + \frac{2}{40}\cos 3\,m w \\ \text{b)}\ s_m &= \frac{16}{40} + \frac{16}{40}\cos 1\ m w + \frac{8}{40}\cos 2\ m w \\ \text{c)}\ s_m &= \frac{16}{40} + \frac{24}{40}\cos 1\ m w \end{aligned}\right\} . \quad (64)$$

und für die Fehler der $\eta$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\ \Delta_\eta &= \frac{12}{40}\delta + \frac{9}{40}(\delta_{-1}+\delta_{+1}) + \frac{4}{40}(\delta_{-2}+\delta_{+2}) \\ &\qquad + \frac{1}{40}(\delta_{-3}+\delta_{+3}) \\ \text{b)}\ \Delta_\eta &= \frac{16}{40}\delta + \frac{8}{40}(\delta_{-1}+\delta_{+1}) + \frac{4}{40}(\delta_{-2}+\delta_{+2}) \\ \text{c)}\ \Delta_\eta &= \frac{16}{40}\delta + \frac{12}{40}(\delta_{-1}+\delta_{+1}) \end{aligned}\right\} (65)$$

erhalten.

Stellt $w$, wie dies meist der Fall sein wird, einen kleinen Bruch dar und ist $m$ auch klein, so kann man die Ausdrücke für $s_m$ durch Reihen darstellen, welche nach Potenzen von $mw$ fortschreiten. Hierzu wurde die Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots . \quad (66)$$

verwendet und erhielt man so die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
\text{a)}\ s_m &= 1 - \frac{68}{80}(mw)^2 + \frac{308}{960}(mw)^4 - \frac{1988}{28800}(mw)^6 \\
&\quad + \frac{15188}{1612800}(mw)^8 - \ldots \\
\text{b)}\ s_m &= 1 - \frac{12}{20}(mw)^2 + \frac{36}{240}(mw)^4 - \frac{132}{7200}(mw)^6 \\
&\quad + \frac{516}{403200}(mw)^8 - \ldots \\
\text{c)}\ s_m &= 1 - \frac{6}{20}(mw)^2 + \frac{6}{240}(mw)^4 - \frac{6}{7200}(mw)^6 \\
&\quad + \frac{6}{403200}(mw)^8 - \ldots
\end{aligned}\right\} (67)$$

## Kapitel 6.

### Die Gruppenmittel-Kurven gebildet aus äquidistanten Ordinaten im Abstand $c$.

Die Gleichung der Kurve sei wieder

$$\left.\begin{aligned} y = a_0 &+ a_1 \cos 1 \cdot wx + a_2 \cos 2 \cdot wx + \ldots \\ &+ b_1 \sin 1 \cdot wx + b_2 \sin 2 \cdot wx + \ldots \end{aligned}\right\} . \quad (68)$$

Man kann alsdann sich Gruppenmittel so gebildet denken, dass nicht alle in der Einheit der Abszissen stehenden Ordinaten verwendet werden, sondern dass man stets eine gewisse Zahl derselben überspringt.

Wir wollen annehmen, dass ein Mittel $\eta$ aus den Ordinaten

$$y_{-\nu c}, \ldots, y_{-c}, y, y_{+c} \ldots y_{+\nu c}$$

zu bilden sei, wobei $c$ den Abstand der äquidistanten Ordinaten und $\nu$ eine ganze Zahl bedeuten.

Die allgemeine Formel der Gruppenmittelbildung wird

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{py + p_1 (y_{-c} + y_{+c}) + p_2 (y_{-2c} + y_{+2c}) + \ldots + p_\nu (y_{-\nu c} + y_{+\nu c})}{p + 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_\nu} \\ &= gy + g_1 (y_{-c} + y_{+c}) + g_2 (y_{-2c} + y_{+2c}) + \ldots + g_\nu (y_{-\nu c} + y_{+\nu c}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (69)$$

sein.

Dies liefert

$$\left.\begin{aligned} \eta = \quad & ga_0 + g_1 \cdot 2a_0 + \ldots + g_\nu \cdot 2a_0 \\ &+ ga_1 \cos 1 \cdot wx + g_1 a_1 [\cos 1 \cdot w(x-c) + \cos 1 \cdot w(x+c)] + \ldots + g_\nu a_1 [\cos 1 \cdot w(x-\nu c) + \cos 1 \cdot w(x+\nu c)] \\ &+ ga_2 \cos 2 \cdot wx + g_1 a_2 [\cos 2 \cdot w(x-c) + \cos 2 \cdot w(x+c)] + \ldots + g_\nu a_2 [\cos 2 \cdot w(x-\nu c) + \cos 2 \cdot w(x+\nu c)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\

darstellen, sondern jedes $y$ durch einen Fehler $\delta_x$ entstellt ist, so wird für ein beliebiges $y$ die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) + \delta_x \\ &= a_0 + a_1 \cos wx + a_2 \cos 2wx + \ldots + a_m \cos mwx + \ldots \\ &\quad + b_1 \sin wx + b_2 \sin 2wx + \ldots + b_m \sin mwx + \ldots \\ &\quad + \delta_x \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

gelten, worin

$$w = \frac{2\pi}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

gesetzt wurde und $l$ allgemein die Länge der Abszissenachse bedeutet, über die sich die zur Rechnung kommenden $y$ erstrecken.

Weiss man irgend woher, dass $f(x)$ periodisch ist und kennt man die Periodenlänge, dann empfiehlt es sich, für $l$ diese einzusetzen; im Allgemeinen kann aber für $l$ jeder Werth gewählt werden und ist in allen (bei uns praktisch vorkommenden) Fällen $f(x)$ durch Gleichung 77 darstellbar.*)

Wir können bei den Betrachtungen in diesem Kapitel die beschränkenden Annahmen fallen lassen.

Die Gruppenmittelbildung pflegt man dann vorzunehmen, wenn die $\delta$ so gross sind, dass sie den Funktionsverlauf verdecken, man geht dabei von dem Satze der Ausgleichungsrechnung aus, dass in einer rein zufälligen Folge von Fehlern die Summe dieser Fehler um so mehr sich der Null nähert, je mehr solcher Fehler zusammengefasst werden, dass also kurz

$$[\delta] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

wird. Jedoch wird Gleichung 79 nur selten streng erfüllt, es bleibt immer ein gewisser von Null verschiedener Werth übrig, der auch das Gruppenmittel fehlerhaft erscheinen lässt.

Rechnet man dieses Mittel als einen Ordinatenwerth $\eta$ zur Abszisse $x$, welche für das in der Mitte der Gruppe liegende $y$ gilt, so gehört es nicht der Grundkurve an, sondern der Gruppenmittelkurve, welche einen zwar ähnlichen, aber doch anderen Verlauf hat, von der man aber annehmen kann, dass sie durch zufällige Fehler weniger entstellt ist, als die Grundkurve. Ihre Gleichung ist:

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &+ s_1 a_1 \cos wx + s_2 a_2 \cos 2wx + \ldots \\ &+ s_m a_m \cos mwx + \ldots \\ &+ s_1 b_1 \sin wx + s_2 b_2 \sin 2wx + \ldots \\ &+ s_m b_m \sin mwx + \ldots \\ &+ \tau_x \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

worin

$$s_m = [g + 2g_1 \cos m \cdot 1w + 2g_2 \cos m \cdot 2w + \ldots + 2g_n \cos m \cdot nw] \quad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_x = [g\delta_x &+ g_1 (\delta_{x-1} + \delta_{x+1}) + g_2 (\delta_{x-2} + \delta_{x+2}) + \cdots \\ &+ g_n (\delta_{x-n} + \delta_{x+n})] \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

sind, $(2n+1)$ die Zahl der zu der Gruppe gehörigen $y$ bedeutet und $g$ die Gewichte nach Formel 39 sind.

Wir haben im Kapitel 5 drei verschiedene Arten der Gruppenmittelbildung herangezogen, die sich folgendermaassen charakterisiren lassen:

I angenäherte Integralmittelbildung,
II einfache Gruppenbildung,
III zusammengesetzte Gruppenbildung (Galle, Bloxam).

Die Ausdrücke für $s_m$ und $\tau_x$ gestalteten sich nach den früheren Formeln:

$$\text{I} \quad s_m = \frac{1}{2n} \sin \frac{2nm\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{m\pi}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\text{II} \quad s_m = \frac{1}{2n+1} \left\{ \sin \frac{2nm\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{m\pi}{l} + \cos \frac{2nm\pi}{l} \right\} \quad (55)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{III a)} \quad s_m &= \frac{12}{40} + \frac{18}{40} \cos mw + \frac{8}{40} \cos 2mw \\ &\quad + \frac{2}{40} \cos 3mw \\ \text{b)} \quad s_m &= \frac{16}{40} + \frac{16}{40} \cos mw + \frac{8}{40} \cos 2mw \\ \text{c)} \quad s_m &= \frac{16}{40} + \frac{24}{40} \cos mw \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

und

$$\text{I} \quad \tau_x = \left[ \frac{1}{2} \delta_{-n} + \delta_{-(n-1)} + \ldots + \delta_{+(n-1)} + \frac{1}{2} \delta_n \right] : 2n$$

$$\text{II} \quad \tau_x = [\delta_{-n} + \ldots + \delta_{+n}] : (2n+1)$$

$$\text{III a)} \quad \tau_x = \frac{12}{40} \delta + \frac{9}{40} (\delta_{-1} + \delta_{+1}) + \frac{4}{40} (\delta_{-2} + \delta_{+2}) + \frac{1}{40} (\delta_{-3} + \delta_{+3})$$

$$\text{b)} \quad \tau_x = \frac{16}{40} \delta + \frac{8}{40} (\delta_{-1} + \delta_{+1}) + \frac{4}{40} (\delta_{-2} + \delta_{+2})$$

$$\text{c)} \quad \tau_x = \frac{16}{40} \delta + \frac{12}{40} (\delta_{-1} + \delta_{+1})$$

Bei der Auswahl einer der drei Methoden muss man zwei Fragen streng auseinander halten. Entweder man hat die Absicht, $\tau_x$ möglichst klein oder $s_m$ möglichst gross zu machen. Im ersten Falle will man eine Reihe erhalten, die thunlichst von Fehlern befreit ist, im zweiten wünscht man, dass die Gruppenmittelkurve sich der Grundkurve möglichst anschmiege.

Will man die Gruppenmittelkurve möglichst fehlerfrei haben, so muss entschieden die einfache Gruppenbildung II angewendet werden, die auch den Vortheil hat, dass sie das einfachste Rechenverfahren bietet.

Das Verfahren I kommt II sehr nahe. Ist der Gruppenumfang gross, so werden die $\tau$ wenig verschieden erhalten werden.

Ganz andere Werthe liefert das Galle'sche Verfahren III.

Ueber die $\delta$ weiss man vor Beendigung der Rechnung, d. h. vor Ableitung von $f(x)$ absolut nichts; man weiss nicht, wie gross sie sind und was sie für Vorzeichen haben und kann sich deshalb auch von $\tau_x$ keine Vorstellung machen.

Im Allgemeinen werden die $\tau$ nach dem Verfahren III grösser werden und einen sehr unregelmässigen Gang zeigen.

Anders liegen die Verhältnisse bezüglich der zweiten Forderung, dass die Gruppenmittelkurve sich möglichst der Grundkurve anschmiege.

*) Hierüber vergleiche man meine bereits erwähnten Untersuchungen über das Wesen der Bessel'schen Formel.

Das hat Prof. Galle wahrscheinlich im Auge gehabt, als er seine Mittelbildung aufstellte, wenn ich auch nicht verstehe, wie er alsdann bei der Aufstellung der Gewichte das Wahrscheinlichkeitsgesetz für zufällige Fehler heranziehen konnte.

Hier kann es möglich sein, dass unter gewissen Annahmen das Verfahren III grössere Werthe der $s$ höherer Ordnung liefert als die beiden ersten Verfahren.

Ein solcher Fall liegt entschieden bei der Ausgleichung der 365 Tagesmittel der Temperatur oder eines anderen meteorologischen Elementes zur Ableitung der Gesetze der jährlichen Periode vor.

Bezeichnet $y$ die Temperatur des x. Tages, so wird für diese die Gleichung

$$\begin{aligned} y = a_0 &+ a_1 \cos w.x + a_2 \cos 2\,w.x + \ldots + a_m \cos m\,w.x + \ldots \\ &+ b_1 \sin w.x + b_2 \sin 2\,w.x + \ldots + b_m \sin m\,w.x + \ldots \\ &+ \delta_x \end{aligned}$$

gelten, worin

$$w = \frac{360}{365} = 0^0\ 59'\ 10''$$

ist. Die Gruppenmittelkurve lautet

$$\begin{aligned} y = a_0 &+ s_1 a_1 \cos w.x + s_2 a_2 \cos 2\,w.x + \ldots + s_m a_m \cos m\,w.x + \ldots \\ &+ s_1 b_1 \sin w.x + s_2 b_2 \sin 2\,w.x + \ldots + s_m b_m \sin m\,w.x + \ldots \end{aligned}$$

und erhält man z. B. bei $n = 3$ für die $s_m$ folgende Gleichungen und daraus abgeleitete Zahlenwerthe.

| | Verfahren I. | Verfahren III. |
|---|---|---|
| $s_m =$ | $\frac{1}{6} \sin \cdot m(2^0 57.54') \operatorname{cotg} m\,(0^0 29.59')$ | $1 - 0.0002519\,m^2 + \ldots$ |
| $s_1 =$ | 0.9997 | 0.9997 |
| $s_2 =$ | 0.9985 | 0.9990 |
| $s_3 =$ | 0.9961 | 0.9977 |
| $s_4 =$ | 0.9923 | 0.9960 |
| $s_5 =$ | 0.9888 | 0.9937 |
| $s_6 =$ | 0.9832 | 0.9910 |
| $s_7 =$ | 0.9772 | 0.9877 |
| $s_8 =$ | 0.9703 | 0.9840 |
| $s_9 =$ | 0.9625 | 0.9798 |
| $s_{10} =$ | 0.9537 | 0.9754 |

Es geht daraus hervor, dass durch die Gruppenmittelbildung nicht nur die zufälligen Fehler, sondern auch die Amplituden der Sinuskurven abgeschwächt werden, aus denen man sich die Grundkurve zusammengesetzt denken kann. Am wenigsten werden die langwelligen Sinuskurven abgeschwächt, welche in diesem Falle die grössten Amplituden haben. Je kürzer die Wellen werden, um so mehr werden sie abgeflacht. Jedoch ist dies nicht von grosser Bedeutung. Die Sinuskurve 10. Ordnung, welche also etwa 36,5 Tage andauert, erscheint in der Gruppenmittelkurve mit 95,4 bis 97,5 % der Amplitude bei der Grundkurve, je nachdem das Verfahren I oder III angewendet wird.

Da sich in der Jahreskurve der Temperatur*) noch kleine Wellen von 5 bis 6 Tagen Länge vorfinden, wird man wahrscheinlich bei Ableitung der Reihe bis zum 73. Gliede gehen müssen. Hier würde

$$s_m = \frac{1}{6} \sin 216^0 \operatorname{cotg} 36^0 = -0{,}134$$

nach dem Verfahren I werden und bei einem Gliede vorher schon Null gewesen sein.

Die Galle'sche Gleichung würde

$$s_m = \frac{12}{40} + \frac{18}{40} \cos 72^0 + \frac{8}{40} \cos 144^0 + \frac{2}{40} \cos 216^0 = +0{,}281$$

ergeben, also auch klein, aber doch wenigstens positiv.

Es ist also ersichtlich, dass die Störungen des Hauptverlaufes der Erscheinungen durch sehr kurze Wellen bei dem Ausgleichungsverfahren I leicht verwischt werden.

Sie können sogar den entgegengesetzten Verlauf, also eine Phasenverschiebung von $^1/_2\,\pi$ zeigen.

Nach dem Verfahren III wird die Amplitude der 73. Sinuskurve zwar bis auf 28 % abgeschwächt, aber sie erleidet diese Phasenverschiebung nicht.

Das Resultat dieses Kapitels wird man in folgende zwei Sätze zusammenfassen können.

1. Vom Standpunkt der Ausgleichungsrechnung aus muss die zusammengesetzte Gruppenmittelbildung verworfen werden und kann nur die **einfache** Gruppenmittelbildung empfohlen werden, da sie sich auf die allgemein anerkannte Gleichung $[\delta] = 0$ stützt.

2. Die zusammengesetzte Gruppenmittelbildung hat zwar den **Vortheil**, dass die **Mittelkurve** sich unter gewissen Bedingungen der Grundkurve **besser anschmiegt** als die nach der einfachen Mittelbildung erhaltene, **aber dieser Vortheil ist nur ein scheinbarer.**

Bezeichnet man nämlich mit $a_m$ und $b_m$ die Koeffizienten der Grundkurve, mit $\alpha_m$ und $\beta_m$ die einer Gruppenmittelkurve, so ist

$$\alpha_m = s_m\,a_m \quad \text{und} \quad \beta_m = s_m\,b_m,$$

so dass aus der Gruppenmittelkurve jederzeit die Grundkurve um so genauer abgeleitet werden kann, je kleiner die Fehler der Mittelkurve bei ihrer Ableitung geworden sind.

Es muss also der Wunsch ausgesprochen werden, dass die komplizirten Rechenvorschriften von Bloxam und Galle künftig keine Verwendung mehr finden.

## Kapitel 8.

## Beispiel der Ableitung von Integralmittelkurven.

Ich setze voraus, dass die Niederschlagsmengen periodischen Veränderungen von 10, 36 und 120 Jahren unterliegen.

Die mittlere Menge soll 700 *mm* betragen und eine jede der drei interferirenden Wellen soll eine Schwingungsweite von 200 *mm* haben, so dass im günstigsten Fall Abweichungen von $\pm$ 300 *mm* von dem Mittel vorkommen können.

Es ist alsdann nach Gl. 15

$$w_1 = \frac{2\pi}{10} = 36^0,\quad w_2 = \frac{2\pi}{36} = 10^0,\quad w_3 = \frac{2\pi}{120} = 3^0 \qquad (83)$$

*) Man sehe die Darstellung derselben für Leipzig in der „Klimatographie des Königreichs Sachsen“ von Prof. Dr. Paul Schreiber, Stuttgart, Engelhorn, 1893.

Die Gleichung selbst sei

$$y = 700 + 100 \cos 36x + 100 \sin 10x - 100 \cos 3x \quad (84)$$

In der allgemeinen Form dieser Gleichung (Formel 16) ist also

$$\left.\begin{array}{llll} a_0 = 700 & & & \\ a'_1 = +100 & a'_2 = a'_3 = \ldots = 0 & & \\ & b'_1 = b'_2 = \ldots = 0 & & \\ & a''_1 = a''_2 = \ldots = 0 & & \\ b''_1 = +100 & b''_2 = b''_3 = \ldots = 0 & & \\ a'''_1 = -100 & a'''_2 = a'''_3 = \ldots = 0 & & \\ & b'''_1 = b'''_2 = \ldots = 0 & & \end{array}\right\} \quad (85)$$

I. Vorgang.

Es mögen aus Gleichung 84 zunächst die Gleichungen der Kurven abgeleitet werden, welche denjenigen bei dem Vorgehen des Herrn Brückner zur Ableitung der Periodizität des Niederschlages entsprechen.

Die Kurve der Lustrenmittel wird ungefähr dadurch erhalten werden, dass in Formel 7

$$\Delta = 5 \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

gesetzt wird, wobei also die Grenzordinaten 0 bis 5, 1 bis 6 u. s. w. genommen werden und allerdings die $\eta$ nicht für $x = 3$, 4 u. s. w., sondern $x = 2\,{}^1\!/_2$, $3\,{}^1\!/_2$ u. s. w. gelten.

Nach Formel 22 findet man

$$\lambda_1 = \frac{5\pi}{10} = \frac{1}{2}\pi, \quad \lambda_2 = \frac{5\pi}{36}, \quad \lambda_3 = \frac{5\pi}{120} = \frac{1}{24}\pi \quad (87)$$

und daraus nach (23)

$$\left.\begin{array}{l} a'_1 = 100\,\dfrac{\sin 90^0}{{}^1\!/_2\,\pi} = 63{,}66 \\ \beta''_1 = 100\,\dfrac{\sin 25^0}{\frac{5}{36}\pi} = 96{,}86 \\ \alpha'''_1 = -100\,\dfrac{\sin 7^0 30'}{\frac{1}{24}\pi} = -99{,}71 \end{array}\right\} \quad (88)$$

Die Integralmittel-Kurve hat also die Gleichung

$$\eta = 700 + 63{,}66 \cos 36x + 96{,}86 \sin 10x - 99{,}71 \cos 3x \quad (89)$$

in der demnach nur die 10jährige Welle stark abgeflacht auftritt.

Berechnet man nach (89) die $\eta$ für Werthe von $x$, die von 5 zu 5 Jahren fortschreiten, so kann man diese schreiben

$$\ldots\ldots \eta_{-10} \quad \eta_{-5} \quad \eta_0 \quad \eta_{+5} \quad \eta_{+10} \ldots\ldots$$

und man kann diese nach Herrn Brückner's Vorgang nach der Formel

$$\eta = \frac{\eta_{-5} + 2\,\eta_0 + \eta_{+5}}{4} \quad \ldots \quad (90)$$

zu weiteren Gruppen zusammenfassen.

Alsdann erhält man nach (74), da $\nu = 1$ ist:

$$s_m = \frac{1}{2} \sin 5\,mw \cdot \operatorname{cotg} \frac{5}{2}\,mw \quad \ldots \quad (91)$$

Nun ist weiter ersichtlich, dass man Gleichung 89 als die einer Kurve von 360 Jahren Periodenlänge auffassen kann. Schreibt man sie in der Form

$$\eta = 700 - 99{,}71 \cos 3x + 96{,}86 \sin 10x + 63{,}66 \cos 36x \quad (92)$$

so ist

$$w = \frac{2\pi}{360} = 1^0$$

$$a_3 = -99{,}71, \quad b_{10} = +96{,}86, \quad a_{36} = +63{,}66,$$

es wird

$$s_m = \frac{1}{2} \sin 5m \operatorname{cotg} \frac{5}{2}\,m$$

und somit

$$s_3 = \frac{1}{2} \sin 15^0 \operatorname{cotg} 7^0 30' = 0{,}983$$

$$s_{10} = \frac{1}{2} \sin 50^0 \operatorname{cotg} 25^0 = 0{,}821$$

$$s_{36} = \frac{1}{2} \sin 180^0 \operatorname{cotg} 90^0 = \frac{0}{0}$$

$$= \cos^2 90^0 = 0.$$

Die Gruppenmittelkurve hat also die Gleichung

$$\vartheta = 700 + 79{,}56 \sin 10x - 98{,}02 \cos 3x \quad (93)$$

und man sieht, dass aus ihr die 10jährige Welle vollständig eliminirt ist.

II. Vorgang.

a) Es wird in Formel 22

$$\Delta = l_1 = 10 \quad \ldots\ldots \quad (94)$$

gesetzt, was nach (24)

$$\lambda_1 = \pi, \quad \lambda_2 = \frac{10}{36}\pi, \quad \lambda_3 = \frac{10}{120}\pi,$$

also

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = 0 \\ \beta'' = 100\,\dfrac{\sin \frac{10}{36}\pi}{\frac{10}{36}\pi} = +87{,}78 \\ \alpha''' = -100\,\dfrac{\sin \frac{10}{120}\pi}{\frac{10}{120}\pi} = +98{,}86 \end{array}\right\} \quad (95)$$

$$\eta = 700 + 87{,}78 \sin 10\,\xi - 98{,}86 \cos 3\,\xi \quad (96)$$

ergiebt.

b) Es wird

$$(\Delta) = l_2 = 36$$

gesetzt und nach (28)

$$(\lambda)_2 = \pi, \quad (\lambda)_3 = \frac{36}{120}\pi,$$

$$\left.\begin{array}{l} (\beta)'' = 0 \\ (\alpha)''' = -98{,}86\,\dfrac{\sin \frac{36}{120}\pi}{\frac{36}{120}\pi} = -84{,}86 \end{array}\right\} \quad (97)$$

$$\vartheta = 700 - 84{,}86 \cos 3\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

erhalten.

Wäre die Gleichung 89 nicht bekannt gewesen, so würde man aus der Ordinatenreihe $y$ erst nach dem Verfahren I der angenäherten Integralmittelbildung (Kapitel 5 I. Annahme) die Ordinatenreihe $\eta$ unter der Annahme $n = 5$ bilden müssen und aus dieser die $\vartheta$ unter der Annahme $n = 18$.

Die Gleichungen für diese Reihen, vollständige Fehlerfreiheit vorausgesetzt, wären gewesen

$$\left.\begin{aligned} y = a_0 &+ a'_1 \cos 36\,x + b'_1 \sin 36\,x + \ldots \\ &+ a''_1 \cos 10\,x + b''_1 \sin 10\,x + \ldots \\ &+ a'''_1 \cos\ 3\,x + b'''_1 \sin\ 3\,x + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta = a_0 &+ \alpha''_1 \cos 10\,\xi + \beta''_1 \sin 10\,\xi + \ldots \\ &+ \alpha'''_1 \cos\ 3\,\xi + \beta'''_1 \sin\ 3\,\xi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

$$\vartheta = a_0 + (a_1)''' \cos 3\,\zeta + (\beta_1)''' \sin 3\,\zeta \ldots . \quad (101)$$

Die Beziehungen der Koeffizienten in den vorstehenden Gleichungen würden alsdann nicht die (95) und (97) sein, sondern an deren Stelle würde nach (48) treten

$$\left.\begin{aligned}
a''_1 &= s''_1\ a''_1 = \frac{1}{10}\,a''_1 \sin \frac{10}{36}\,\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{36}\,\pi = 0{,}8756\ a''_1 \\
\beta''_1 &= s''_1\ b''_1 = \qquad\qquad = 0{,}8756\ b''_1 \quad \{\text{statt } 0{,}8778\ b''_1\} \\
a'''_1 &= s'''_1\ a'''_1 = \frac{1}{10}\,a'''_1 \sin \frac{10}{120}\,\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{120}\,\pi = 0{,}9884\ a'''_1 \quad \{\text{statt } 0{,}9886\ a'''_1\} \\
\beta'''_1 &= s'''_1\ b'''_1 = \qquad\qquad = 0{,}9884\ b'''_1 \\
(a_1)''' &= (s_1)'''\ a'''_1 = \frac{1}{36}\,a'''_1 \sin \frac{36}{120}\,\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{120}\,\pi = 0{,}8582\ a'''_1 \quad \{\text{statt } 0{,}8584\ a'''_1\} \\
(\beta_1)''' &= (s_1)'''\ \beta'''_1 = \qquad\qquad = 0{,}8582\ a'''_1 \\
&\text{oder} \\
(a_1)''' &= a'''_1 \times 0{,}9884 \times 0{,}8582 = 0{,}8482\ a'''_1 \quad \{\text{statt } 0{,}8486\ a'''_1\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Die nach der Gruppenmittelmethode, welche der angenäherten Integralmittelmethode entspricht, hergeleiteten Koeffizienten der ersten und zweiten Integralmittelkurve entsprechen also nahezu denen, welche die strenge Rechnung ergeben würde.

Die Ordinatenreihe der $\vartheta$ lässt die Koeffizienten bestimmen, es wird nach (30)

$$a_0 = \frac{1}{120}\int_0^{120} \vartheta\ d\,\zeta$$

$$(a_1)''' = \frac{1}{60}\int_0^{120} \vartheta \cdot \cos 3\zeta\ d\zeta,\ (\beta_1)''' = \frac{1}{60}\int_0^{120} \vartheta \cdot \sin 3\zeta\ d\,\zeta \text{ u. s. w.}$$

und würde in unserem Fall

$a_0 = 700,\ (a_1)''' = -84{,}86,\ (\beta_1)''' = 0,\ (a_2)''' = 0$ u. s. w.

gefunden werden müssen.

Man wird nun

$$a'''_1 = (a_1)''' : 0{,}8582$$

und damit die neue Ordinatenreihe

$$\left.\begin{aligned} (\eta) &= \eta - a_0 - a'''_1 \cos 3\,\xi \\ &= a''_1 \cos 10\,\xi + \beta''_1 \sin 10\,\xi + \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

berechnen. Aus dieser erhält man

$$a''_1 = \frac{1}{18}\int_0^{36} (\eta) \cos 10\,\xi\ d\,\xi = 0,$$

$$\beta''_1 = \frac{1}{18}\int_0^{36} (\eta) \sin 10\,\xi\ d\,\xi = 87{,}78 \text{ (ungefähr)}$$

und die anderen Koeffizienten alle gleich Null.

Weiter berechnet man

$$b''_1 = \beta''_1 : 0{,}8756$$
$$a'''_1 = a'''_1 : 0{,}9884$$

und damit die Ordinatenreihe

$$\left.\begin{aligned} (y) &= y - a_0 - b''_1 \sin 10\,x - a'''_1 \cos 3\,x \\ &= a'_1 \cos 36\,x + b'_1 \sin 36\,x + \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (104)$$

woraus

$$a'_1 = \frac{1}{5}\int_0^{10} (y) \cos 36\,x\,dx = 100 \text{ (ungefähr)},$$

$$\beta'_1 = \frac{1}{5}\int_0^{10} (y) \sin 36\,x\,dx = 0$$

und ebenso die anderen Koeffizienten gleich 0 gefunden werden.

## Abschnitt. V.

## Die Kriterien der Existenz von Perioden bekannter Länge in Beobachtungsreihen.

### Kapitel I.

### Die Formeln.

In der gegebenen Ordinatenreihe der $y$ sollen aus Gründen irgend welcher Art von einander unabhängige periodische Schwankungen mit den Periodenlängen

$$l_1,\ l_2 \ldots . l_k \ldots .$$

vermuthet werden können.

Setzt man

$$w_1 = \frac{2\,\pi}{l_1},\ w_2 = \frac{2\,\pi}{l_2},\ \ldots\ w_k = \frac{2\,\pi}{l_k}, \quad . \quad (1)$$

so lässt sich eine jede der Ordinaten $y$ durch die zugehörige Abszisse $x$ mittelst der Reihe

$$\left.\begin{aligned} y = a_0 &+ a'_1 \cos w_1 x + a'_2 \cos 2 w_1 x + \ldots + a'_m \cos m w_1 x + \ldots \\ &+ b'_1 \sin w_1 x + b'_2 \sin 2 w_1 x + \ldots + b'_m \sin m w_1 x + \ldots \\ &+ a''_1 \cos w_2 x + a''_2 \cos 2 w_2 x + \ldots + a''_m \cos m w_2 x + \ldots \\ &+ b''_1 \sin w_2 x + b''_2 \sin 2 w_2 x + \ldots + b''_m \sin m w_2 x + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a^k_1 \cos w_k x + a^k_2 \cos 2 w_k x + \ldots + a^k_m \cos m w_k x + \ldots \\ &+ b^k_1 \sin w_k x + b^k_2 \sin 2 w_k x + \ldots + b^k_m \sin m w_k x + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

darstellen, wofür man den kurzen Ausdruck

$$y = a_0 + [a^k_m \cos m w_k x] + [b^k_m \sin m w_k x] \quad . \quad (3)$$

einführen kann.

Bildet man Gruppenmittel der $y$, so erhält man eine andere Ordinatenreihe der $\eta$, welche von den zufälligen Fehlern um so mehr befreit sein werden, je mehr $y$ in eine Gruppe eingehen, die aber auch einem anderen Gesetz gehorchen.

Man wird die $\eta$ als Gruppenmittel **erster** Ordnung bezeichnen und ihre Gleichung

$$\eta_1 = a_0 + [a^k_{1\cdot m} \cos m w_k x] + [\beta^k_{1\cdot m} \sin m w_k x] \, . \quad (4)$$

schreiben können, worin für $m$ und $k$ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. einzustellen sind und die 1 vor dem $m$die Ordnung der Gruppe bedeutet.

Aus den $\eta$ kann man durch weitere Gruppenmittelbildung eine Ordinatenreihe der $\eta_2$ herleiten, welche als Gruppenmittel **zweiter** Ordnung zu bezeichnen sind und deren Gleichung

$$\eta_2 = a_0 + [a^k_{2\cdot m} \cos m w_k x] + [\beta^k_{2\cdot m} \sin m w_k x] \quad (5)$$

ist. Auf diese Weise kann man fortfahren bis zu den Gruppenmitteln $r$. Ordnung, deren Gleichung

$$\eta_r = a_0 + [a^k_{r\cdot m} \cos m w_k x] + [\beta^k_{r\cdot m} \sin m w_k x] \quad (6)$$

ist.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten in Gleichung 4 ist

$$a^k_{1\cdot m} = s^k_{1\cdot m} a^k_m, \quad \beta^k_{1\cdot m} = s^k_{1\cdot m} b^k_m \quad . \quad . \quad (7)$$

und weiter ist

$$\left.\begin{aligned} s^k_{1\cdot m} = [g_1 &+ 2 g_{1\cdot 1} \cos m w_k + 2 g_{1\cdot 2} \cos 2 m w_k + \ldots \\ &+ 2 g_{1\cdot n_1} \cos n_1 m w_k] \end{aligned}\right\} (8)$$

Für Gleichung 5 erhält man ferner

$$\left.\begin{aligned} a^k_{2\cdot m} &= s^k_{2\cdot m} a^k_{1\cdot m} = s^k_{1\cdot m} \cdot s^k_{2\cdot m} a^k_m \\ \beta^k_{2\cdot m} &= s^k_{2\cdot m} \beta^k_{1\cdot m} = s^k_{1\cdot m} \cdot s^k_{2\cdot m} b^k_m \end{aligned}\right\} \quad . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} s^k_{2\cdot m} = [g_2 &+ 2 g_{2\cdot 1} \cos m w_k + 2 g_{2\cdot 2} \cos 2 m w_k + \ldots \\ &+ 2 g_{2\cdot n_2} \cos n_2 m w_k] \end{aligned}\right\} (10)$$

und für Gleichung 6

$$\left.\begin{aligned} a^k_{r\cdot m} &= s^k_{1\cdot m} \cdot s^k_{2\cdot m} \ldots . s^k_{r\cdot m} a^k_m \\ \beta^k_{r\cdot m} &= s^k_{1\cdot m} \cdot s^k_{2\cdot m} \ldots . s^k_{r\cdot m} b^k_m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} s^k_{r\cdot m} = [g_r &+ 2 g_{r\cdot 1} \cos m w_k + 2 g_{r\cdot 2} \cos 2 m w_k + \ldots \\ &+ 2 g_{r\cdot n_r} \cos n_r m w_k] \end{aligned}\right\} (12)$$

Die Faktoren $s$ wird man als **Abflachungsfaktoren** bezeichnen können, da sie zwischen den Grenzen $\pm$ 1 liegen, und angeben, um wieviel die Amplituden der Sinuskurven, aus denen die Reihe der $y$ zusammengesetzt gedacht werden kann, in den Gruppenmittelreihen abgeflacht erscheinen.

Ich will die vorstehend angegebenen Formeln, welche ohne Weiteres aus den Betrachtungen des Abschnittes IV folgen, hier auf das Problem der Periodizität der (jährlichen) Niederschlagsmengen anwenden.

Wie man aus den Darstellungen des I. Abschnittes ersehen wird, sind unter anderen hauptsächlich periodische Schwankungen von 11, 35 und 110 Jahren aufgestellt worden, und wird es sich darum handeln, zu prüfen, ob diese Periodizitäten den hier entwickelten Kriterien Stand halten.

Ich setze also

$$l_1 = 11, \; l_2 = 35, \; l_3 = 110$$

und erhalte nach (1)

$$w_1 = 32^0 \cdot 73 \quad w_2 = 10^0 \cdot 29 \quad w_3 = 3^0 \cdot 27.$$

Die Gleichung für irgend eine Reihe von Niederschlagsmengen wird dann sein

$$y = a_0 + [a^k_m \cos m w_k x] + [b^k_m \sin m w_k x],$$

worin man für $k$ nach und nach 1, 2 und 3 resp. $'$, $''$, $'''$ setzen und für $m$ die Werthe 1, 2, 3 u. s. w. einstellen wird, je nachdem man glaubt, Glieder der Bessel'schen Reihe für die Theilschwankungen in Betracht ziehen zu müssen. Ich werde hier mich stets mit den drei ersten Gliedern begnügen.

## Kapitel 2.

### Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel I. Ordnung.

*A)* Angenäherte Integralmittel durch dreigliedrige Gruppen, Ordinaten im Abstand 1.

Hier kommen die Formeln 46 ff. des Kapitel 5 im Abschnitt IV in Anwendung, wonach $n = 1$ zu setzen ist und

$$s^k_{1\cdot m} = \frac{1}{2} \sin m w_k \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} m w_k$$

wird.

Setzt man die Zahlenwerthe ein, so erhält man

| $k =$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m = 1$ | 0,921 | 0,990 | 1,000 |
| 2 | 0,708 | 0,969 | 1,000 |
| 3 | 0,439 | 0,929 | 0,991 |

Bei dieser Gruppenmittelbildung wird nur die 11jährige Periode einigermaassen abgeflacht, die Glieder dritter Ordnung derselben treten mit weniger als der Hälfte der Schwingungsweite auf.

*B)* Angenäherte Integralmittel durch dreigliedrige Gruppen, Ordinaten im Abstand $c = 5$.

Nach den Formeln 69 ff. des Kapitel 6 im Abschnitt IV erhält man $\nu = 1$, $c = 5$

$$s^k_{1\cdot m} = \frac{1}{2} \sin 5 m w_k \operatorname{cotg} \frac{5}{2} m w_k$$

und weiter

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,020 | 0,811 | 0,980 |
| 2 | 0,921 | 0,388 | 0,921 |
| 3 | 0,172 | 0,049 | 0,828 |

Es ist bemerkenswerth, dass diese Gruppenbildung stark abflachend auf die Amplituden der 11jährigen und 35jährigen Periode, sogar auf die der 110jährigen Periode wirkt.

*C)* Einfache Gruppenbildung, fünfgliedrig. Nach den Formeln 53 ff. des Kapitel 5 im Abschnitt IV ist $n=2$

$$s^k{}_{1\cdot m}=\frac{1}{5}\left\{\sin 2\,m\,w_k\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}m\,w_k+\cos 2\,m\,w_k\right\}$$

und erhält man

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,703 | 0,968 | 0,998 |
| 2 | 0,104 | 0,877 | 0,988 |
| 3 | —0,241 | 0,733 | 0,969 |

*D)* Einfache Gruppenbildung, 11gliedrig. Es ist hier $n=5$

$$s^k{}_{1\cdot m}=\frac{1}{11}\left\{\sin 5\,m\,w_k\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}m\,w_k+\cos 5\,m\,w_k\right\}$$

wodurch man erhält

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,000 | 0,846 | 0,986 |
| 2 | 0,000 | 0,468 | 0,938 |
| 3 | —0,001 | 0,061 | 0,859 |

*E)* Einfache Gruppenbildung, 35gliedrig, $n=17$

$$s^k{}_{1\cdot m}=\frac{1}{35}\left\{\sin 17\,m\,w_k\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}m\,w_k+\cos 17\,m\,w_k\right\}$$

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | —0,055 | 0,000 | 0,844 |
| 2 | 0,048 | 0,000 | 0,457 |
| 3 | —0,038 | —0,001 | 0,063 |

*F)* Einfache Gruppenbildung, 111gliedrig, $n=55$

$$s^k{}_{1\cdot m}=\frac{1}{111}\left\{\sin 55\,m\,w_k\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}m\,w_k+\cos 55\,m\,w_k\right\}$$

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,009 | —0,052 | —0,009 |
| 2 | 0,009 | 0,045 | 0,009 |
| 3 | 0,009 | —0,034 | —0,009 |

## Kapitel 3.

### Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel II. Ordnung.

*A)* Angenäherte dreigliedrige Integralmittel ($c=1$) aus einfachen fünfgliedrigen Gruppenmitteln.

Die Abflachungsfaktoren erhält man durch Kombination der Zahlen unter $C$ und $A$ in Kapitel 2.

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,647 | 0,958 | 0,998 |
| 2 | 0,074 | 0,850 | 0,988 |
| 3 | — 0,103 | 0,681 | 0,960 |

*B)* Angenäherte dreigliedrige Integralmittel $c=5$ aus einfachen fünfgliedrigen Gruppenmitteln.

Die Kombination der Faktoren unter $B$ und $A$ in Kapitel 2 liefert

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,014 | 0,788 | 0,978 |
| 2 | 0,096 | 0,340 | 0,910 |
| 3 | — 0,041 | 0,036 | 0,802 |

*C)* Einfache 35gliedrige Gruppenmittel aus einfachen elfgliedrigen Gruppenmitteln.

Die Kombination der Faktoren $D$ und $E$ in Kapitel 2 liefert

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,000 | 0,000 | 0,834 |
| 2 | 0,000 | 0,000 | 0,429 |
| 3 | 0,000 | 0,000 | 0,054 |

## Kapitel 4.

### Die Abflachungsfaktoren der Gruppenmittel III. Ordnung.

Hier handelt es sich bloss darum, aus den Gruppenmitteln II. Ordnung, welche aus den elfgliedrigen Gruppenmitteln mittelst 35gliedriger Gruppenbildung erhalten worden waren, neue Mittel durch Zusammenfassung von je 111 Ordinaten herzuleiten.

Die Abflachungsfaktoren werden sich durch Multiplikation der entsprechenden Zahlen in Kapitel 2 unter $F$ und Kapitel 3 unter $C$ ergeben, wodurch man folgende Werthe erhält:

| $k=$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $m=1$ | 0,000 | 0,000 | — 0,007 |
| 2 | 0,000 | 0,000 | + 0,004 |
| 3 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Die Gruppenmittel III. Ordnung werden also — wenn die Amplitude der 110jährigen Periode nicht sehr gross ist — eine horizontale gerade Linie bilden müssen.

## Kapitel 5.

### Die Kurven der Lustrenmittel.

Wenn die Jahreswerthe zu fünfgliedrigen Gruppen vereinigt werden und man annimmt, dass die ersten Glieder der Bessel'schen Reihen für die drei interferirenden Perioden die Amplituden derselben in der Hauptsache bestimmen, so wird nach Kapitel 2 *C)* in den Kurven der Lustrenmittel die elfjährige Periode mit 70,3 %, die 35jährige mit 96,8 % und die 110jährige mit 99,8 % ihrer thatsäch-

lichen Amplitude auftreten. Diese Kurven sind auf Tafel II dargestellt.

Obenan steht die in Abschnitt IV, Kapitel 8 definirte erste Integralmittelkurve für $\Delta = 5$, deren Gleichung (89)

$$\eta = 700 + 63{,}66 \cos 36\,x + 96{,}86 \sin 10\,x - 99{,}71 \cos 3\,x$$

ist, in der also die Theilkurven ähnlich abgeflacht sind, die 10jährige Periode sogar noch etwas mehr.

Da in den Lustrenkurven die zufälligen Fehler schon stark abgeschwächt erscheinen, müsste die 35jährige Periode stark hervortreten, falls diese allein noch in diesen Kurven stecken sollte. Das ist bei keiner der Ortskurven der Fall. Die Pariser Reihe hat viel Aehnliches mit der theoretischen Kurve, zeigt aber in ihrer letzten Strecke einen zu hohen Verlauf. Die Kurven für Deutschbrod und Freiberg verlaufen so ähnlich, dass kein Grund vorliegt, Deutschbrod zu kassiren. Bemerkenswerth ist weiter der ähnliche Verlauf fast sämmtlicher Ortskurven von 1860 an.

In Fig. 2 der Tafel II sind die Lustrenmittel für die Zonen von 1000 *m*, 370 *m* und 0 *m* in Sachsen nach den Grundgleichungen (Spalte 16) dargestellt.

Es kann wohl kaum geleugnet werden, dass aus diesen das Schwanken um eine aufsteigende Linie hervortritt. Die Maximalmengen fallen je nach der Höhenlage auf die Jahre 1868, 1880—1882 und 1889. Minima treten 1873 und 1885—1886 hervor. Der Abstand dieser Extreme erinnert ganz auffallend an die elfjährige Periode. Aber ganz entschieden ist das letzte Minimum 1885/89 höher als das erste Maximum, so dass also ausser dieser elfjährigen Schwankung in dem ganzen Zeitraum von 1866 bis 1892 eine entschiedene Zunahme der Regenmengen zu konstatiren ist.

## Kapitel 6.

### Die Lustrenmittel nochmals nach der Formel $(a + 2b + c) : 4$ ausgeglichen.

Die in Tafel II Fig. 1 als punktirte Linien eingetragenen Gruppenmittelkurven II. Ordnung enthalten nach Kapitel 3 *A*) die Amplituden der elfjährigen Periode mit 64,7 %, die der 35jährigen mit 95,8 % und die der 110jährigen mit 99,8 %. Der Verlauf derselben ist den Gruppenmitteln I. Ordnung so ähnlich, dass nichts weiter darüber zu sagen ist. Nach der Theorie kann ja der Unterschied nur darin bestehen, dass die zufälligen Fehler und die elfjährige Periode noch etwas mehr in den Gruppenmitteln II. Ordnung abgeschwächt erscheinen.

In Fig. 3 der Tafel II wurde das Ergebniss derselben Ausgleichung der Ordinaten der Fig. 2 als ausgezogene Linien dargestellt. Auch hier zeigt es sich, dass der Charakter der Kurven I. Ordnung nicht geändert wurde. Die Amplituden sind in denen der II. Ordnung etwas kleiner, was für die Existenz der elfjährigen Periode spricht, sonst ist alles das daraus zu ersehen, was in Kapitel 5 hervorgehoben wurde.

## Kapitel 7.

### Die Lustrenmittel Brückner's und deren Ausgleichung nach der Formel $(a + 2b + c) : 4$.

Ich habe aus dem Brückner'schen Werk die in Prozenten der vieljährigen Mittel ausgedrückten Lustrenmittel herausgeschrieben, einige fehlende Zahlen interpolirt und die Werthe für das Lustrum 1886/90 hinzugefügt.

Dargestellt sind diese Zahlen auf Tafel III, Fig. 2 als punktirte Linien.

Zu beachten ist, dass Brückner nicht die volle Reihe, also z. B. 1801—1805, 1802—1806, 1803—1807 u. s. w., giebt, sondern bloss 1801—1805, 1806—1810, 1811 bis 1815 u. s. w.

Die punktirten Kurven stellen also den Verlauf nur angenähert dar, enthalten aber eine eventuelle elfjährige Periode mit 70 % der Amplitude derselben.

Für Paris muss ausserdem hervorgehoben werden, dass Herr Brückner — was kaum glaublich erscheint — in eine Ordinatenreihe die Relativzahlen bezogen auf die Mittel 484 *mm* (1691—1718), 416 *mm* (1719—1754) und von da an auf 525 (?) zusammengestellt hat. Das ist die Ursache der Verschiedenheit der Kurven in Fig. 1, Tafel II, und Fig. 2, Tafel III.

Auch bei diesen Zahlen, wenngleich eine jede derselben das Mittel aus fünf Einzelwerthen ist, wird man zuerst die Untersuchung der Zufälligkeit der Lustrenfolgen zu stellen haben. Es erscheint klar, dass bei einer rein zufälligen Anordnung der Jahresmengen dasselbe bei deren Lustrenmittel der Fall sein muss und dass man aus der Zufälligkeit der einen Reihe auf die der anderen schliessen kann.

Ich werde mich darauf beschränken können, die einzelnen Kriterien tabellarisch aufzuführen, indem ich auf die eingehenden Darstellungen des Abschnitt III verweise.

Mittel %, Mittlere Fehler %, Extreme % und langjährige Mittel *mm*

| Station | Zeitraum Jahr von | bis | Zahl der Lustrenmittel. | Mittel aus allen Lustren Werth | mittl. Fehler | Abweichungen vom Mittel Extreme Max. | Min. | Differenz der Extreme | Langjährige Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Padua . . . | 1726 | 1890 | 33 | 100,5 % | ± 2,1 % | + 22 % | — 29 % | 51 % | 848 *mm* |
| Paris . . . . | 1691 | 1890 | 33 | 98,7 | 1,6 | 20 | 19 | 39 | 530 ? |
| Mailand . . | 1766 | 1890 | 25 | 100,9 | 2,0 | 20 | 15 | 35 | 992 |
| Marseille . . | 1766 | 1890 | 24 | 98,2 | 3,6 | 30 | 42 | 72 | 500 |
| Lund . . . . | 1746 | 1890 | 29 | 99,8 | 1,6 | 16 | 14 | 30 | 506 |
| Upsala . . . | 1741 | 1890 | 22 | 100,0 | 1,5 | 14 | 14 | 28 | 554 |
| Stuttgart . . | 1826 | 1890 | 13 | 100,7 | 2,7 | 21 | 21 | 42 | 625 |
| Prag . . . . | 1806 | 1890 | 17 | 103,1 | 2,7 | 28 | 18 | 46 | 416 |
| Bologna . . | 1811 | 1890 | 16 | 99,2 | 3,4 | 24 | 28 | 52 | 637 |
| Rom . . . . | 1781 | 1890 | 21 | 101,0 | 2,5 | 30 | 21 | 51 | 810 |
| Oxford . . . | 1816 | 1890 | 15 | 100,3 | 2,1 | 23 | 14 | 37 | 597 |
| Edingburgh | 1821 | 1890 | 14 | 96,4 | 2,5 | 13 | 17 | 30 | 394 |
| Kopenhagen | 1826 | 1890 | 13 | 99,4 | 2,7 | 16 | 22 | 38 | 563 |
| Stockholm . | 1786 | 1890 | 21 | 102,1 | 2,8 | 25 | 19 | 44 | 600 |
| Warschau . | 1811 | 1890 | 15 | 93,6 | 2,9 | 30 | 12 | 42 | 695 |

Kriterien der $v$, $\delta$ und $\tau$.

| Station | $n$ | $v$ | | | | $\delta$ | | | | $\tau$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Anzahl der Fehler | | Zeichen- | | Anzahl der $\delta$ | | Zeichen- | | Anzahl der $\tau$ | | Zeichen- | |
| | | + | − | wechsel | folge | + | − | wechsel | folge | + | − | wechsel | folge |
| Padua . . . | 33 | 17 | 16 | 13 | 19* | 15 | 17 | 17 | 14 | 16 | 16 | 22 | 9 |
| Paris . . . . | 33 | 17 | 16 | 14 | 18* | 16 | 16 | 21 | 10 | 16 | 16 | 19 | 12 |
| Mailand . . | 25 | 12 | 13 | 7 | 17* | 12 | 12 | 13 | 10 | 11 | 13 | 13 | 10 |
| Marseille . | 24 | 14 | 10 | 11 | 12 | 10 | 13 | 16 | 6 | 10 | 13 | 14 | 8 |
| Lund . . . . | 29 | 14 | 15 | 13 | 15 | 12 | 16 | 19 | 8 | 15 | 13 | 20 | 7 |
| Upsala . . . | 22 | 11 | 11 | 11 | 10 | 11 | 10 | 14 | 6 | 11 | 10 | 13 | 7 |
| Stuttgart . | 13 | 7 | 6 | 7 | 5 | 7 | 5 | 8 | 3 | 5 | 7 | 7 | 4 |
| Prag . . . . | 17 | 8 | 9 | 5 | 11* | 6 | 10 | 6 | 9* | 7 | 9 | 9 | 6 |
| Bologna . . | 16 | 9 | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | 9 | 5 | 9 | 6 | 8 | 6 |
| Rom . . . . | 21 | 9 | 12 | 10 | 10 | 11 | 9 | 13 | 6 | 9 | 11 | 11 | 8 |
| Oxford . . . | 15 | 6 | 9 | 5 | 9* | 6 | 8 | 8 | 5 | 8 | 6 | 9 | 4 |
| Edinburgh . | 14 | 8 | 6 | 11 | 2 | 5 | 8 | 10 | 2 | 6 | 7 | 7 | 5 |
| Kopenhagen | 13 | 7 | 6 | 5 | 7 | 8 | 4 | 8 | 3 | 7 | 5 | 7 | 4 |
| Stockholm . | 21 | 11 | 10 | 11 | 9 | 10 | 10 | 13 | 6 | 8 | 12 | 8 | 11* |
| Warschau . | 15 | 6 | 9 | 6 | 8 | 7 | 7 | 8 | 5 | 9 | 5 | 8 | 5 |

Abbe's Kriterium und die charakteristischen Fehler.

| Station | $\frac{[\delta\delta]}{[vv]}$ | $\mu$ | $d$ | $v'$ | $vv''$ | $\frac{\mu}{d}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Padua . . . . . | 0,9* | ± 12 % | ± 9 % | ± 8 % | ± 7 % | 1,30 |
| Paris . . . . . | 1,7 | 9 | 7 | 6 | 5 | 1,26 |
| Mailand . . . . | 1,0* | 10 | 8 | 7 | 9 | 1,24 |
| Marseille . . . | 1,8 | 18 | 14 | 12 | 10 | 1,24 |
| Lund . . . . . | 1,4* | 8 | 7 | 6 | 7 | 1,25 |
| Upsala . . . . . | 2,5 | 7 | 6 | 5 | 4 | 1,27 |
| Stuttgart . . . | 1,9 | 10 | 7 | 7 | 5 | 1,33 |
| Prag . . . . . | 1,5 | 11 | 8 | 7 | 6 | 1,32 |
| Bologna . . . . | 1,7 | 14 | 11 | 9 | 9 | 1,23 |
| Rom . . . . . | 2,1 | 11 | 9 | 8 | 8 | 1,23 |
| Oxford . . . . | 1,5 | 8 | 6 | 5 | 4 | 1,43 |
| Edinburgh . . | 3,1 | 9 | 8 | 6 | 6 | 1,16 |
| Kopenhagen . | 2,8 | 10 | 7 | 7 | 4 | 1,34 |
| Stockholm . . | 2,1 | 13 | 11 | 9 | 12 | 1,15 |
| Warschau . . . | 1,5 | 11 | 9 | 7 | 7 | 1,26 |

Die als „Langjährige Mittel" in der ersten Tabelle aufgeführten Werthe sind dem Werke Brückner's entnommen und auf sie beziehen sich die Prozentzahlen, welche vorherstehen, und in der dritten Tabelle die charakteristischen Fehler.

Bei Durchsicht der drei Tabellen findet man, dass nur die wenigen durch * bezeichneten Stellen gegen die Zufälligkeit der Lustrenfolge sprechen.

Die weit überwiegende Zahl der Kriterien spricht für die Zufälligkeit, und so kommt man auch hier zu dem Schluss, dass bei allen den zu der Untersuchung herangezogenen Zahlen ein periodischer Verlauf nicht vorliegt, wenn die Kriterien der Zufälligkeit, wie sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung aufstellt, irgend welchen Werth haben.

Werden die Lustrenmittel Brückner's nach der Formel $(a + 2b + c) : 4$ ausgeglichen, so haben die dabei entstehenden Gruppenmittel II. Ordnung einen ganz anderen Charakter als die im vorhergegangenen Kapitel. Hierbei haben die benachbarten Ordinaten nicht das Intervall 1, sondern 5. Es wurde diese Ausgleichung vorgenommen und finden sich die so erhaltenen Gruppenmittel II. Ordnung als die ausgezogenen Kurven der Fig. 2, Tafel III, graphisch dargestellt.

Diese Kurven können die Amplitude der elfjährigen Periode mit nur 1,4 % (also nicht), die der 35jährigen Periode mit 78,8 % und die der 110jährigen Periode mit 97,8 % (Kapitel 3, *B*) enthalten.

Die elfjährige Periode ist also fast vollständig eliminirt, und erscheint es daher nicht wunderbar, dass Herr Brückner eine solche in seinen Zahlen nicht finden konnte.

Würde eine 35jährige Periode allein existiren, so würde diese in den 15 Kurven sich deutlich zeigen. Ich vermag sie nicht zu erkennen und muss es dem Leser überlassen, ob er sie herausfinden kann.

## Kapitel 8.

## Die Elfjahrmittelkurven.

Werden die Jahressummen zu elfgliedrigen Gruppen zusammengefasst, so wird hierdurch nach Kapitel 2 *D)* die elfjährige Periode vollständig eliminirt. Die 35jährige erscheint mit 84,6 %, die 110jährige mit 98,6 % der Amplitude.

Den so erhaltenen Gruppenmitteln wurde in Fig. 1, Tafel III, die theoretische Kurve vorgestellt, aus der die 10jährige Periode eliminirt ist und die nur noch die 36jährige und die 120jährige mit 87,8 % resp. 98,9 % enthält und deren Gleichung im vorhergehenden Abschnitt Kapitel 8

$$\eta = 700 + 87{,}78 \sin 10\xi - 98{,}86 \cos 3\xi$$

gefunden wurde.

Würde die 35jährige Periode thatsächlich bestehen, die 110jährige nicht, oder nur geringe Amplitude haben, so müssten erstere in den Kurven Fig. 1 der Tafel III scharf hervortreten. Ich kann dies nicht daraus ersehen.

In Fig. 3 der Tafel II habe ich als punktirte Linien die Zahlen aufgetragen, welche man durch elfjährige Ausgleichung der für 1000 *m*, 370 *m* und 0 *m* nach den Grundgleichungen für Sachsen sich ergebenden Werthe erhält.

Während die ausgezogenen Kurven die elfjährige Periode mit 64,7 % enthalten, muss sie aus den punktirten verschwunden sein. Es ist interessant zu sehen, wie die auf eine elfjährige Periode hindeutenden Schwankungen der ersteren Kurven aus den letzten thatsächlich verschwunden sind. Diese letzteren zeigen ein von 1869 an beginnendes Ansteigen der Regenmengen. In den höchsten Regionen des Landes erreichten dieselben im Jahre 1880 ein Maximum und sind von da wieder etwas gesunken. In den tieferen Regionen ist dieses Maximum (falls es überhaupt ein solches ist) erst 1886 eingetreten. Es würde voreilig sein, aus dem Verlauf dieser Kurven irgend welche Schlüsse auf die Zukunft zu gründen. Bemerkenswerth ist, dass alle drei Kurven von 1887 an die Tendenz zum Ansteigen zeigen.

Da nach den Darstellungen der Fig. 3, Tafel II, eine Berechtigung zur Annahme der Existenz einer elfjährigen

Periode in Sachsen vorhanden ist und auch die Gestaltung der Kurven für Paris auf den Tafeln II und III hiergegen nicht spricht, wurde versucht, eine solche direkt abzuleiten. Die Regenmengen wurden also in der Reihenfolge

$$\begin{array}{cccccccc} s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{10} & s_{11} \\ s_{12} & s_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{21} & s_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

angeordnet und aus den einzelnen Kolonnen die Mittel gebildet. Durch Subtraktion dieser Mittel von den Einzelwerthen in den entsprechenden Kolonnen erhielt man die Fehler der Einzelwerthe und daraus die mittleren Fehler der Kolonnenmittel. Die Abweichungen der letzteren von ihrem Gesammtmittel stellen die Ordinaten der vorausgesetzten elfjährigen Periode dar und die Differenz der Extremwerthe dieser Ordinaten wird man als die Amplitude der Periode betrachten können.

In der ersten Kolonne wurden die Zahlen für 1828 (blos Dresden), 1839, 1850, 1861, 1872 und 1883 eingestellt, woraus sich leicht die Jahre berechnen lassen, welche in die anderen Kolonnen gehören.

Die Resulate waren:

| | Dresden | | Freiberg | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | + 60 | ± 60 *mm* | + 38 | ± 18 *mm* |
| 2 | — 41 | ± 22 | — 14 | ± 24 |
| 3 | — 11 | ± 47 | — 26 | ± 73 |
| 4 | — 41 | ± 64 | — 71 | ± 37 |
| 5 | — 46 | ± 62 | + 11 | ± 87 |
| 6 | — 22 | ± 24 | — 61 | ± 39 |
| 7 | + 89 | ± 51 | + 70 | ± 57 |
| 8 | — 17 | ± 38 | + 1 | ± 49 |
| 9 | + 29 | ± 47 | + 24 | ± 43 |
| 10 | — 33 | ± 29 | — 23 | ± 78 |
| 11 | + 33 | ± 41 | + 48 | ± 69 |

Wie aus diesen Zahlen und deren graphischer Darstellung in Fig. 3 der Tafel IV zu ersehen ist, würde nicht eine elfjährige Periode herauskommen, sondern Schwankungen mit 6—7 Jahren Periodenlänge, die also an die bekannten 7 fetten und 7 trockenen Jahre der Bibel erinnern. Die Schwankungen von einem Minimum zu einem Maximum in der Zeit von 3—4 Jahren würden mehr als 120 *mm* betragen. Das wäre ein interessantes und wichtiges Resultat, wenn nicht die bösen mittleren Fehler der einzelnen Ordinaten aussagten, dass diesen aus der Rechnung folgenden Kurven jeder reelle Werth fehlt.

Für Paris ergab eine ähnliche Rechnung aus 18 Reihen

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordinaten | — 1 | + 21 | — 10 | — 0 | + 4 | — 11 |
| deren mittl. Fehler | ± 23 | ± 17 | ± 30 | ± 27 | ± 23 | ± 20 |

| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ordinaten | + 10 | — 8 | — 32 | — 3 | + 26 |
| deren mittl. Fehler | + 27 | + 23 | + 14 | + 18 | + 25 |

also dasselbe negative Resultat.

Dabei ist allerdings hervorzuheben, dass diese Art der Ableitung der Periodizität nur dann korrekt ist, wenn nur die einfache periodische Schwankung angenommen werden kann.

## Kapitel 9.

### Die fünfunddreissigjährigen Mittelkurven.

Werden je 7 der von Prof. Brückner gegebenen Lustrenmittel zu einem Gruppenmittel vereinigt, so geben diese 35jährige Mittel, welche als Ordinaten einer 35-gliedrigen Gruppenmittelkurve zu betrachten sind. Nach Kapitel 2 *E)* ist aus diesen die elfjährige Periode fast und die 35jährige vollkommen verschwunden.

Wäre Herrn Brückner's Periode also thatsächlich mit der von ihm behaupteten Grösse der Amplitude allein vorhanden, so müssten diese aus seinen eigenen Zahlen berechneten Mittel konstante Werthe und zwar 100 % liefern. Die Fig. 2 der Tafel IV zeigt, dass dies durchaus nicht der Fall ist.

Es treten in diesen Kurven noch Schwankungen bis zu 20 % auf, die also Perioden von längerer Dauer angehören müssten. Die 110jährige Periode tritt in diesen Kurven mit 84 % ihrer Amplitude auf, sie müsste also klar hervortreten.

Wie man sieht, könnte dies bei den Kurven für Padua und Paris stimmen. Aber die Beobachtungen dieser beiden Stationen und noch mehr die der anderen sind nicht lang genug, um darüber sicher zu entscheiden.

## Kapitel 10.

### Fünfunddreissigjährige Mittelkurven hergeleitet aus elfjährigen Mitteln.

Gleicht man die auf Tafel III dargestellte Elfjahrmittelkurve für Paris nochmals durch 35gliedrige Gruppen aus, so erhält man die Kurve auf Tafel IV, Fig. 1. Diese kann nach Kapitel 3 *C)* die elf- und 35jährige Periode nicht enthalten, es muss aber die 110jährige mit 83,4 % ihrer Amplitude auftreten.

Der erste Theil der Kurve für Paris verläuft in der That der darüber befindlichen theoretischen mit reiner 120jährigen Periode sehr ähnlich, aber der zweite Theil stimmt nicht und zeigt, dass, wenn die 110jährige Periode auch vorhanden sein kann, doch noch eine andere von längerer Dauer angenommen werden muss.

Ich habe versucht, aus den elfjährigen Mitteln die Ordinaten einer etwaigen 35jährigen Periode für Paris nach demselben Verfahren, wie im Kapitel 8 die der elfjährigen, abzuleiten. Verwenden konnte ich 5 Reihen: 1694—1728, 1729—1763, 1764—1798, 1799—1833, 1834—1868.

Diese ergaben nachstehende Ordinaten und deren mittlere Fehler.

| | $y$ | $\mu_y$ | | $y$ | $\mu_y$ | | $y$ | $\mu_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — 2 | ± 25 *mm* | 13 | + 7 | ± 21 *mm* | 25 | — 9 | ± 19 *mm* |
| 2 | + 1 | 24 | 14 | + 11 | 21 | 26 | — 16 | 23 |
| 3 | 0 | 26 | 15 | + 15 | 22 | 27 | — 19 | 21 |
| 4 | + 4 | 24 | 16 | + 20 | 20 | 28 | — 17 | 27 |
| 5 | + 3 | 22 | 17 | + 10 | 16 | 29 | — 24 | 27 |
| 6 | + 6 | 22 | 18 | + 16 | 16 | 30 | — 25 | 28 |
| 7 | + 12 | 20 | 19 | + 15 | 12 | 31 | — 22 | 27 |
| 8 | + 14 | 24 | 20 | + 15 | 11 | 32 | — 22 | 22 |
| 9 | + 11 | 21 | 21 | + 12 | 11 | 33 | — 21 | 25 |
| 10 | + 10 | 23 | 22 | + 8 | 12 | 34 | — 10 | 26 |
| 11 | + 16 | 21 | 23 | + 4 | 11 | 35 | — 12 | 30 |
| 12 | + 6 | 22 | 24 | + 4 | 16 | | | |

Diese Werthe wurden in Fig. 1 der Tafel IV für den Zeitraum 1834—1868 unter der Gruppenmittelkurve II. Ordnung graphisch dargestellt. Sie ergeben einen ziem-

lich guten Verlauf. Die Maxima werden darnach etwa + 20 *mm* betragen und auf die Jahre 1710, 1745, 1780, 1815, 1850, 1885 etc. fallen, während die Minima — 25 *mm* Werth erreichen und zu den Jahren 1723, 1758, 1793, 1828, 1863, 1898 etc. gehören.

Das würde somit zu den Ergebnissen des Herrn Brückner ganz gut passen.

Aber:

1. Die Schwankung beträgt nur $45 \times \frac{100}{85} = 53$ *mm*,

also nicht 20—25 %, sondern nur höchstens 10—11 % des vieljährigen Mittels.

2. Die mittleren Fehler der Ordinaten sind so gross, dass auch hier gezweifelt werden muss, ob die so schöne Periodizität wirklich existirt.

## Kapitel 11.

### Die Ausgleichung der Gruppenmittelkurve II. Ordnung des Kapitel 10 durch 111gliedrige Gruppenmittelbildung.

Werden die Ordinaten der Pariser Kurve in Fig. 1, Tafel IV, zu Gruppen von 111 Gliedern zusammengefasst, so entsteht die Kurve von 1766—1817, welche dort punktirt eingetragen ist, mit 469 *mm* beginnt und bis 506 *mm* ansteigt. Nach Kapitel 4 müssen bei der vorliegenden 3fachen Ausgleichung alle drei der vorausgesetzten Perioden verschwinden und müsste man durch dieselben statt der stark aufsteigenden Linie eine horizontale Gerade erhalten haben.

Es lehrt dies also, dass ausser diesen drei Perioden (wenn sie existiren sollten) noch eine weitere Ursache vorhanden ist, wodurch eine andauernde oder auch periodische Veränderung der Regenmengen bedingt wird.

### Schlussergebnisse.

Ich fasse die Ergebnisse der Arbeit in folgende Sätze zusammen:

1. Der von Herrn Hann aufgestellte Satz, dass das Verhältniss der Niederschlagsmengen zweier Stationen, wie gross auch deren absolute Schwankungen sein mögen, konstant bleibt, entbehrt der thatsächlichen und theoretischen Begründung.

Es kann nur angenähert für nahe und gleichartig liegende Stationen gültig sein.

Die darauf begründete Rechnung des Herrn Brückner ist unberechtigt.

2. Anstatt der Formel des Herrn Riggenbach (Spalte 19)

$$s = a + bh + ctgz$$

empfiehlt sich mehr

$$s = a + bh + ctgz \cos \varphi .$$

3. Die von der Ausgleichungsrechnung aufgestellten Kriterien für die Zufälligkeit der Folge der Regenmengen sprechen mit ihrer weit überwiegenden Majorität für das Walten des Zufalles.

Sollten die wenigen der Gesetzmässigkeit günstigen Kriterien durch gewisse periodische Schwankungen bedingt sein, so können diese nur kleine Amplituden haben, welche gegenüber den von dem Zufall herbeigeführten Abweichungen der einzelnen Jahresmengen von den langjährigen Mitteln stark zurücktreten.

Es geht jedoch hervor, dass Ursachen der Trockenheit oder des Regenreichthums längere Zeit anhalten, so dass man mehrere Jahre des einen oder anderen Charakters hintereinander erwarten kann. Aber die Folge dieser Zeiten muss als eine zufällige betrachtet werden.

4. Es ist wünschenswerth, dass in der Meteorologie die Methoden und Ausdrucksweisen mehr als bisher der Ausgleichungsrechnung angepasst werden. Als die charakteristischen Fehler, welche man zur Taxirung der Genauigkeit den Resultaten beifügen sollte, wird für die Einzelbeobachtungen der „durchschnittliche“ und für das Resultat der „mittlere“ Fehler vorgeschlagen, da nur dieser und nicht der wahrscheinliche Fehler den Charakter des wahrscheinlichsten Fehlers des Resultates hat.

Für die Ableitung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Fehlers zwischen den Grenzen $v_o$ und $v_n$ wird Formel 18) Spalte 34 in Vorschlag gebracht:

$$\Phi = (v_n - v_o) \left[\varphi(v_o) + \varphi(v_n)\right].$$

5. Die von Herrn Ule bezweifelte reelle Bedeutung der im I. Klimaheft gegebenen und verwendeten „Landesmengen“ wird aufrecht erhalten.

Wie weit dieselben zur Berechnung der über dem ganzen Lande thatsächlich niedergegangenen Niederschlagsmengen verwendet werden können, ist allerdings erst noch zu erörtern.

Zweifellos stellen sie die Mengen dar, welche der Höhenlage zukommen, die das Mittel der Höhen der einzelnen Stationen ergiebt.

Wenn durch zeitweises Fehlen der Beobachtungen einer oder einiger Stationen und durch Wechsel in der Höhe des Regenmessers an einigen Stationen diese mittlere Höhe etwas verändert wurde, so sind die dadurch entstandenen Fehler so gering, dass sie anderen Fehlerquellen gegenüber vernachlässigt werden können.

Aus denselben Gründen kann die von Herrn Brückner erhobene Ausstellung gegen die Beweiskraft der Regenmessungen in Sachsen gegen seine Theorie nicht anerkannt werden.

6. Bei den zur Verminderung der zufälligen Fehler vielfach angewendeten Gruppenbildungen empfiehlt sich — schon wegen der Einfachheit der Rechnung — die einfache Gruppenmittelbildung. Die von den Herren Bloxam und Gallo angegebenen und vertheidigten komplizirten Rechenvorschriften widersprechen den Grundsätzen der Ausgleichungsrechnung und bieten keinen entsprechenden, die grosse Mühe lohnenden Vortheil. Bei Auswahl des Gruppenumfanges hat man darauf zu sehen, dass durch die Gruppenmittelbildung der gesuchte periodische Verlauf nicht zu stark abgeflacht oder gar eliminirt wird.

7. Die Existenz einer 11jährigen, vermuthlich mit der Sonnenfleckenbildung in irgend welchem Zusammenhang

stehenden periodischen Schwankung, ist in dem Verlauf der Lustrenmittel der Niederschlagsmengen in Sachsen für alle Höhenlagen stark angedeutet. Hierfür spricht, dass bei 11jähriger Ausgleichung dieser Regenmengen die Schwankungen verschwinden.

Sollte diese 11jährige Periode thatsächlich bestehen, so müssen aber ausserdem eine oder mehrere Schwankungen irgend welcher Natur vorhanden sein.

Die direkte Ableitung der Elfjahrkurve führte weder für die Beobachtungen in Dresden, noch in Freiberg, noch in Paris zu einem bestimmten Resultat. Ihre Amplitude muss also so klein sein, dass die durch sie bedingten Abweichungen vom allgemeinen Mittel gegen die anderen zufälligen oder gesetzmässigen Ursachen für die Anomalien stark zurücktreten.

8. Was die 35jährige Periode betrifft, so ergaben 5 Perioden der Pariser Beobachtungen eine Schwankung von $1{,}18 \times (45 \pm 34\ mm)$, deren reelle Bedeutung also ziemlich fraglich ist. Die Maxima und Minima fallen mit den von Brückner angegebenen Zeiten gut zusammen.

Klar und bestimmt tritt diese Schwankung in keiner Kurve hervor.

Da durch 35gliedrige Gruppenmittelbildung jedoch die meisten Unregelmässigkeiten in den Kurven der ausgeglichenen Lustrenmittel (Fig. 2, Tafel III) und der Elfjahrmittelkurve (Fig. 1, Tafel III) verschwinden, kann die Existenz der 35jährigen Kurve vorhanden sein, hat aber eine viel kleinere Amplitude, als Brückner angiebt.

9. Die 110jährige Periode kann ebenfalls bestehen. Da jedoch durch 111gliedrige Gruppen für Paris noch keine konstanten Mittel erzielt werden konnten, dieselben vielmehr in eine aufsteigende Gerade sich ordnen, so müsste ausser derselben noch irgend eine andere Schwankung angenommen werden.

# Die Grundgleichungen für Zustand und Zustandsänderung in der Atmosphäre.

## Einleitung.

Die Arbeiten zur Ableitung der Gesetze, wonach sich die Witterungsverhältnisse in Sachsen gestalten, welche seit mehreren Jahren begonnen wurden, sind nunmehr so weit vorgeschritten, dass in zwei Klimaheften*) eine grosse Zahl von mehrjährigen Mitteln publizirt werden konnte.

Dabei stellte sich heraus, dass fast die sämmtlichen Elemente, welche zusammen das Klima charakterisiren, als Funktionen der Höhenlagen der Stationen auftreten.

Die graphischen Darstellungen der sämmtlichen Gattungen von Mittelwerthen lassen erkennen, dass man durch fast alle Punktsysteme als „wahrscheinlichste“ Gestaltungen „gerade Linien“ legen kann, woraus sich also ergiebt, dass diese Zahlen sich durch die Gleichung

$$y = a + bh$$

darstellen lassen, worin $y$ einen Mittelwerth und $h$ die Seehöhe des betreffenden Ortes bedeuten, $a$ und $b$ aber konstante Grössen sind, für die die Bezeichnungen Grundwerth und Höhenfaktor eingeführt wurden.

Die umfangreiche Berechnung der sämmtlichen Grundgleichungen für das ganze im zweiten Klimahefte enthaltene Material ist beendet und harrt der Publikation. Es soll diese in extenso in einem weiteren Klimahefte geschehen. Auszüge sind bereits an anderen Stellen mitgetheilt worden. Es ist dies namentlich in dem amtlichen Berichte der Direktion des meteorologischen Institutes an das Königl. Ministerium des Innern für das Jahr 1892 und in der meteorologischen Zeitschrift der Fall. Auch wurden die Ergebnisse dieser Rechnung zu einer Darstellung der klimatischen Verhältnisse des Landes verwendet, welche unter dem Titel „Klimatographie des Königreiches Sachsen“ erschienen ist und das 1. Heft im VIII. Bande der „Forschungen zur deutschen Volks- und Landeskunde“ (Stuttgart, Engelhorn) bildet.

Die nächste Aufgabe wird nunmehr sein, an diese Thatsachen theoretische Betrachtungen zu knüpfen, um einen klaren Einblick in das Wesen der Witterungsvorgänge bei uns erzielen zu können.

Was namentlich Anstoss zum Beginn dieser Untersuchungen gab, ist die Bestimmtheit, womit eine Zunahme der Niederschläge mit der Höhe erfolgt. Die Gesetzmässigkeit dieses Vorganges ist derart scharf ausgesprochen, dass 25jährige Mittel (1866—1890) von 15 Stationen einerseits und 5jährige Mittel (1886—1890) von 117 Stationen andererseits fast identische Werthe der Höhenfaktoren ergaben. Dabei stellte sich heraus, dass man nahezu für alle Monate dieselbe Zunahme der Niederschläge mit der Höhe erwarten darf und dass die Erhöhung der Monatssumme für je 100 *m* zu 4,5 *mm* angenommen werden kann.

Für den ersten Augenblick erscheint es selbstverständlich zu sein, dass die Niederschläge in den Gebirgen sowohl an Häufigkeit als Ergiebigkeit diejenigen der Ebenen übertreffen. Bei näherer Ueberlegung aber kommt man zu dem Resultate, dass zwar Gebirge und Ebene einen Unterschied bedingen müssen, aber man zunächst vermuthen muss, dass bei gleichen Neigungsverhältnissen die Niederschlagsmenge am Fusse eines Gebirges eher grösser als kleiner sei.

Was die Hülfsmittel zu diesen Untersuchungen betrifft, so werden vor Allem die Lehren der Mechanik der gasförmigen Körper in Verbindung mit denen der mechanischen Wärmetheorie und der Physik überhaupt zur Verwendung gelangen.

Es leuchtet aber ein, dass hier ein Problem von solchem Umfange und solcher Schwierigkeit vorliegt, wie es wohl von wenigen der Forschung des menschlichen Geistes unterliegenden Materien gesagt werden kann. Die Schwierigkeit liegt hauptsächlich darin, dass bei der Komplizirtheit der Vorgänge man nur mit Mühe sie so zu definiren vermag, um die Hülfsmittel der mathematisch-physikalischen Forschung in Anwendung bringen zu können.

Die thatsächlichen Bewegungsvorgänge und Zustandsänderungen in der Atmosphäre wird man kaum jemals der mathematisch-physikalischen Behandlung unterwerfen können. Man muss sich hier damit helfen, dass man bestimmte Vorgänge annimmt und diese untersucht. Wenn man so die wirklichen Vorgänge in Grenzen einschliesst, dann erst kann man nach und nach eine Vorstellung von

*) „Das Klima des Königreiches Sachsen.“ Heft I: Die Niederschlagsverhältnisse der Jahre 1864—1890 u. s. w. Heft II: Fünf- und mehrjährige Mittel aus den Monats- und Jahresergebnissen der Beobachtungen 1864—1890. Chemnitz, Kommissionsverlag der Karl Brunner'schen Buchhandlung (Martin Bülz).

dem wahren Wesen aller der Erscheinungen erlangen, welche in dem ungeheuren Raume der Atmosphäre von der ganzen Oberfläche der Erde bis zu den höchsten Höhen sich darbieten, bald wohlthuend und günstig dem Sein aller lebenden und leblosen Wesen wirken, bald aber im Unwetter mit Tod und Vernichtung drohen.

Dieser Schwierigkeit der Untersuchung, welche bei dem geringsten Versuche, in das Innere einzudringen und nicht nur mit schönen Worten wie die Katze um den heissen Brei herumzugehen, einen grossen Aufwand von Zeit für mathematische Entwickelungen und Zahlenrechnen bedingt, ist es zuzuschreiben, dass bisher in dieser Richtung nur wenig Versuche gemacht wurden.

Was die Heranziehung der mechanischen Wärmetheorie betrifft, so lassen sich folgende Arbeiten besonders anführen.

Im Jahrgange 1874 (Band IX) der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie berichtet Herr Hann über zwei Arbeiten der Herren W. Thomson und Peslin, in denen der Ausdruck für den Differentialquotienten $dt:dh$ beim Aufsteigen trockener oder feuchter Luft unter der Annahme adiabatischer Zustandsänderung, also die Abnahme der Temperatur für die Einheit der Höhenänderung in aufsteigenden Luftströmen, abgeleitet wird.

Mit ähnlichen Aufgaben beschäftigt sich Herr „Reye“ in den Anhängen zu seinem Werke über Wirbelstürme.*)

Im Jahre 1876 erschien die erste der zwei grösseren Arbeiten von Guldberg und Mohn in Christiania**), bei denen überall adiabatische Zustandsänderungen vorausgesetzt werden.

Im I. Bande (1884) der meteorologischen Zeitschrift entwickelte Herr Hertz die Gleichungen der adiabatischen Linien und gab graphische Darstellungen derselben.

Im Jahre 1888 begannen die Abhandlungen des Herrn v. Bezold „Zur Thermodynamik der Atmosphäre“ in den Sitzungsberichten der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften, in denen die geometrischen Darstellungen Clapeyron's bei der Untersuchung atmosphärischer Bewegungsvorgänge eingeführt werden.

Die hier folgenden Entwickelungen unterscheiden sich wesentlich von den Arbeiten der genannten Autoren.

---

I. Theil.

## Die Formeln.

---

### I. Grundzustand und Grenzzustand.

Die Einheit des Gewichtes der Luft (1 $kg$) möge eine bestimmte Menge ($G_0$) Wasser enthalten. Dieses Wasser wird im Allgemeinen in Form von gesättigtem Dampfe oder überhitztem Dampfe, wofür kurz die Ausdrücke „Wasserdampf“ resp. „Wassergas“ eingeführt werden sollen, sich befinden. Es kann aber auch möglich sein, dass neben dem Wasserdampfe flüssiges Wasser oder Eis, oder auch beide gleichzeitig sich vorfinden. Von diesen wollen wir hier annehmen, dass sie in Form von kleinen Tropfen resp. Krystallen in dem ganzen Raume des Kilogramms Gemenge gleichmässig vertheilt sind. Also wird 1 $kg$ Luft bestehen aus $(1 - G_0)$ $kg$ trockener Luft und $G_0$ $kg$ Wasser in der angenommenen Weise.

Durch dieses Gewicht $G_0$ ist der „Grundzustand“ der Luft bestimmt.

Befindet sich die Luft in dem Zustande, dass die $G_0$ $kg$ sich gerade in Form von (gesättigtem) Dampf vorfinden, so soll dieser Zustand als der „Grenzzustand“ bezeichnet werden.

In dem Grenzzustande möge der in Millimetern Quecksilbersäule zu rechnende Gesammtdruck der Luft $b_0$ sein; $s_0$ sei die der Temperatur $t_0{}^0$ C. oder $T_0 = 273 + t_0$ (absolute Temperatur) entsprechende Dampfspannung.

Wir setzen voraus, dass die Luft und das Wassergas (bis zur Grenze der Sättigung) den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac folgen.

Den mathematischen Ausdruck für beide Gesetze schreiben wir in der Form

$$\frac{v_1\, p_1}{v_2\, p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ oder } \frac{v_1\, b_1}{v_2\, b_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$v$ wird das Volumen in Kubikmetern, $p$ der zugehörige Druck in Kilogrammen für 1 $qm$, $T = 273 + t^0$ C. die absolute Temperatur sein. Zwischen dem Drucke $p$ und der diesem entsprechenden, in Millimetern gemessenen Quecksilbersäule von der Temperatur $0^0$ C. wird die Beziehung

$$p = \gamma' b = 13{,}596\, b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

bestehen, worin also $\gamma' = 13{,}596$ $kg$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet.

Stellt man sich zunächst 1 $cbm$ Luft im Grenzzustande vor, so wird dieses enthalten:

$\gamma_1$ $kg$ trockene Luft im Zustande $v_0 = 1$ $cbm$, $(b_0 - s_0)$ und $T_0$,

$\gamma_2$ $kg$ Wasserdampf im Zustande $v_0 = 1$ $cbm$, $s_0$ und $T_0$.

Im Normalzustand, d. h. bei $b = 760$ $mm$ und $T = 273^0$, hat der erste Gemengtheil das Volumen

$$v = \frac{b_0 - s_0}{760} \cdot \frac{273}{T_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Das Gewicht des Kubikmeters Luft in diesem Zustande wird zu

$$1{,}29318\ kg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

angenommen. Dies giebt somit

$$\gamma_1 = 1{,}29318\, \frac{273}{760} \cdot \frac{b_0 - s_0}{T_0} = 0{,}46452\, \frac{b_0 - s_0}{T_0}\ kg \quad (5)$$

Die Dichte des Wasserdampfes, bezogen auf Luft von

---

*) Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen u. s. w. von Dr. Theodor Reye. Hannover, Carl Rümpler.

**) Études sur les mouvements de l'atmosphère par C. M. Guldberg et A. Mohn. Christiania. I. Theil 1876, II. Theil 1880.

Es darf auch nicht vergessen werden: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Sechs Abhandlungen, enthaltend Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper von August Ritter. Hannover (Karl Rümpler) 1879.

gleicher Temperatur und gleichem Drucke, wird zu 0,623 angenommen. So erhält man

$$\gamma_2 = 0{,}623 \times 1{,}29318 \times \frac{273}{760} \cdot \frac{s_0}{T_0} = 0{,}2894 \frac{s_0}{T_0} kg \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) liefern als Gleichung für das „spezifische Gewicht der Luft im Grenzzustande“

$$\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{0{,}46452 b_0 - 0{,}17512 s_0}{T_0} = \frac{m b_0 - n s_0}{T_0} kg \quad (I)$$

und für das „spezifische Volumen der Luft im Grenzzustande“

$$\varphi_0 = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{T_0}{0{,}46452 b_0 - 0{,}17512 s_0} = \frac{T_0}{m b_0 - n s_0} cbm \quad (II)$$

In den Gleichungen (I) und (II) wurde gesetzt

$$m = 0{,}46452,\ n = 0{,}17512,\ (m - n) = 0{,}28940 \quad (7)$$

Die Gleichungen (6) und (II) gestatten die Bestimmung von $G_0$, da

$$G_0 = \varphi_0 \gamma_2 = (m - n) \frac{s_0}{m b_0 - n s_0} kg \quad . \quad (III)$$

sein muss.

Eine wesentliche Vereinfachung erlangen die Ausdrücke, wenn man als „Druckquotienten“ die Bezeichnung

$$e_0 = s_0 : b_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

einführt, wodurch man

$$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{b_0}{T_0} (m - n e_0)\ kg \quad . \quad . \quad . \quad . & (Ia) \\ \varphi_0 = \frac{T_0}{b_0} \frac{1}{m - n e_0} cbm \quad . \quad . \quad . \quad . & (IIa) \\ G_0 = (m - n) \frac{e_0}{m - n e_0} kg \quad . \quad . \quad . & (IIIa) \end{cases}$$

erhält und daraus erkennt, dass der Grundzustand durch den Druckquotienten $e_0$ bestimmt ist, da $G_0$ blos von diesem Werthe abhängt.

## II. Die Zustandsänderung nach der Feuchtseite.

Aendert sich der Zustand von 1 *kg* Luft derart, dass ein Theil des Dampfes kondensirt erscheint, so soll dieser Zustand als Feuchtzustand bezeichnet werden, gleichgültig ob das Produkt der Kondensation in flüssiger oder fester Form auftritt.

Bei diesem Vorgange wird die im Gemenge vorhandene Luft aus dem Zustande $(\varphi_0, (b_0 - s_0), t_0)$ in den Zustand $(\varphi, (b - s), t)$ gebracht, woraus sich

$$\varphi (b - s) = \varphi_0 \frac{b_0 - s_0}{T_0} T \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ergiebt.

Der Wasserdampf kommt aus dem Zustande $(\varphi_0, s_0, t_0)$ in $(\varphi, s, t)$.

Da wir auf der Feuchtseite der Zustände stets gesättigte Luft haben, so ist $s$ nur eine Funktion der Temperatur, und zwar kann man

$$s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

annehmen.

Wendet man auf Gleichung (8) die Formel (IIa) an und setzt

$$S = \frac{1 - e_0}{m - n e_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

so erhält man als Zustandsgleichungen des Feuchtzustandes

$$\left.\begin{aligned} \varphi (b - s) &= S T, \\ s &= 4{,}6 + 3{,}368 (0{,}1 t) + 1{,}0186 \times (0{,}1 t)^2 + \\ &\quad 0{,}17917 (0{,}1 t)^3 + 0{,}03195 (0{,}1 t)^4 + \\ &\quad 0{,}0025 (0{,}1 t)^5 - 0{,}00056 (0{,}1 t)^6 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (VI)$$

Die Reihe für $s$ wurde aus den Werthen

| | |
|---|---|
| $s = 0{,}4$ *mm* | für $t = -30^0$ |
| 0,9 | $-20^0$ |
| 2,1 | $-10^0$ |
| 4,6 | $0^0$ |
| 9,2 | $+10^0$ |
| 17,4 | $+20^0$ |
| 31,5 | $+30^0$ |

abgeleitet und stellt die Spannung des Wasserdampfes zwischen $-30^0$ und $+30^0$ genügend genau dar. Nur bei $-15^0$ erreichen die Differenzen zwischen den in Jelinek's Psychrometertabellen gegebenen und nach Formel (VI) berechneten $s$ Werthe bis zu 0,1 *mm*.

Nach Ableitung der Zustandsgleichungen können wir uns zu den Gewichtsgleichungen wenden.

Wie schon erwähnt, setzen wir voraus, dass alles Wasser oder Eis in der Luftmasse in sehr kleinen Tröpfchen, beziehentlich Krystallen, suspendirt ist, das Gewicht der Luftmasse also und somit deren Grundzustand ungeändert bleibt.

An dieser Voraussetzung muss man zunächst festhalten, da ein solcher Vorgang zweifellos in der Natur vorhanden ist und die eine Grenze darstellt.

Das Gesammtgewicht von Wasserdampf und Wasser, resp. Eis, wird mithin den nach Formel (III) zu berechnenden Werth $G_0$ haben.

Wir trennen dieses in

$G$ das Gewicht des Wasserdampfes,
$G'$ „ „ „ Wassers resp. Eises,

dann ist zweifellos

$$G_0 = G + G' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$G$ ist auf dieselbe Weise wie $G_0$ zu berechnen, und so erhält man die

Gewichtsgleichungen im Feuchtzustande

$$\left.\begin{aligned} G_0 = G + G' &= (m - n) \frac{e_0}{m - n e_0} \\ G &= (m - n) S \frac{s}{b - s} = (m - n) S \frac{e}{1 - e} \\ G' &= \frac{m - n}{m - n e_0} \cdot \frac{e_0 - e}{1 - e} = \frac{m - n}{1 - e_0} S \frac{e_0 - e}{1 - e} \end{aligned}\right\} \quad (VII)$$

worin der Druckquotient

$$e = \frac{s}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VIII)$$

gesetzt wurde.

## III. Die Zustandsänderung nach der Trockenseite.

In den Trockenzustand gelangt die Luft aus dem Grenzzustande, wenn die Spannung des Wasserdampfes kleiner wird, als dem Sättigungszustande der betreffenden Temperatur entspricht.

Der Wasserdampf des Grenzzustandes wird alsdann zu Wassergas, und soll dies derart hervorgehoben werden, dass mit

$s$ die Spannung des Wasserdampfes von $t_0$,
$\sigma$ „ „ „ Wassergases von $t_0$

bezeichnet wird.

Bei dem Uebergange in den Trockenzustand geht die in der Gewichtseinheit des Gemenges enthaltene Luft aus dem Zustande $(\varphi_0,\ b_0 - s_0,\ T_0)$ in den Zustand $(\varphi,\ b - \sigma,\ T)$ über, so dass die Gleichung

$$\frac{\varphi_0\,(b_0 - s_0)}{\varphi\,(b - \sigma)} = \frac{T_0}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gilt. Auf gleiche Weise ändert der Wasserdampf seinen Zustand aus $(\varphi_0,\ s_0,\ T_0)$ in $(\varphi,\ \sigma,\ T)$, so dass

$$\frac{\varphi_0\ s_0}{\varphi\ \sigma} = \frac{T_0}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

angenommen werden kann.

Die Verbindung der Gleichungen (11) und (12) liefert

$$\frac{b_0 - s_0}{b - \sigma} = \frac{s_0}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

oder

$$\frac{b_0}{b} = \frac{s_0}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Verbindet man die Aussagen der Gleichungen (11) und (14) mit dem Ausdrucke (IIa) für $\varphi_0$ und setzt

$$R = \frac{1}{m - n e_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IX)$$

so erhält man als

Zustandsgleichungen für den Trockenzustand

$$\left.\begin{aligned} \varphi b &= RT \\ \sigma &= e_0 b \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

Die Gewichtsgleichungen des Trockenzustandes sind mit denen für den Grenzzustand identisch.

## IV. Die Grenzkurve.

Im Allgemeinen wird wachsende Temperatur und abnehmender Druck den Trockenzustand bedingen, während umgekehrt Abkühlung und Druckerhöhung die Luft in den Feuchtzustand bringen.

Sowie aber Abkühlung mit Erniedrigung des Druckes, oder Erwärmung mit einer Druckvermehrung verbunden ist, dann ist die Aenderung des Zustandes nicht ohne Weiteres angebbar.

Wir finden hierüber in den Zustands- und Gewichtsgleichungen die beste Auskunft.

Betrachtet man zunächst die dritte der Gleichungen (VII), so ist ersichtlich, dass im Feuchtzustande

$$e < e_0$$

sein muss.

Jedes Ausscheiden von Wasser muss also mit einer Verminderung des Druckquotienten verbunden sein.

Weiter ergiebt die Gleichung (X) durch

$$\sigma = e_0 b,$$

dass

$$e = e_0 = Const. = \text{Maximum}.$$

Für denselben Grundzustand wird also der Druckquotient im Trockenzustande einen grössten und im ganzen Gebiete dieses Zustandes konstanten Werth haben.

Mithin wird bei

$e < e_0$ Feuchtzustand,
$e = e_0$ Grenzzustand resp. Trockenzustand

herrschen.

Denkt man sich die Zustände der Luft derart aufgetragen, dass als Abszissen die Barometerstände und als Ordinaten die Temperaturen angenommen werden, so werden Feuchtzustand und Trockenzustand durch eine Linie abgegrenzt werden, welche als Grenzkurve zu bezeichnen ist. Die Gleichung dieser Linie ist einfach

$$\frac{s_0}{b_0} = Const. = e_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XI)$$

oder nach Gleichung (9)

$$\alpha + \beta t_0 + \gamma t_0^2 + \ldots = e_0 b_0.$$

Darnach lässt sich die Grenzkurve für einen jeden Grundzustand leicht bestimmen.

## V. Die innere Arbeit $U$.

Für die Differenz der inneren Arbeit der atmosphärischen Luft und des Wassergases kann man nach Zeuner*) die Gleichung

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

annehmen, worin $U_1$ und $U_2$ die Werthe der inneren Arbeit bei den Temperaturen $t_1$ und $t_2$ der Gewichtseinheit der Luft resp. des Wassergases, $c$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und $A$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

### A) Ausdruck für $U$ bei trockener atmosphärischer Luft.

Es vereinfacht die Formeln ausserordentlich, wenn man für die atmosphärische Luft annimmt, dass sie bis zum absoluten Nullpunkt den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac folge. Nun ist dies zwar nicht der Fall, aber diese Annahme kann hier unbedenklich gemacht werden,

*) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. II. Auflage. Seite 122.

weil bei der Anwendung stets Differenzen zweier $U$ vorkommen. Wenn man dann annimmt, dass bei dem absoluten Nullpunkt die innere Arbeit verschwindend klein sei, so erhält man einfach die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,U &= 0{,}16844\,T \text{ Kalorien} \\ U &= 71{,}42\,T\ mkg \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(XII)}$$

### B) Ausdruck für $U$ bei Wassergas.

Es sei $t_0$ die Temperatur, bei der die Gewichtseinheit Wasserdampf gerade gesättigt ist, und $U_0$ die innere Arbeit in diesem Zustande. Bringt man den Dampf in überhitztem Zustande auf die Temperatur $t$, so wird die innere Arbeit $U$ werden und gilt hierfür die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} A\,U &= A\,U_0 + \quad 0{,}34\,(t - t_0) \text{ Kalorien} \\ U &= \quad U_0 + 144{,}2 \quad (t - t_0)\ mkg \end{aligned}\right\} \text{(XIII)}$$

### C) Ausdruck für $U$ bei Wasserdampf.

Hier wird man am besten thun, wenn man gleich die Fälle behandelt, in denen die Gewichtseinheit aus Gemengen von

a) Dampf mit Wasser: Regenstadium;
b) Dampf mit Wasser und Eis: Hagelstadium;
c) Dampf mit Eis: Schneestadium

besteht.

Die obigen Ausdrücke sind wohl von Hertz eingeführt worden.

Der Entwickelung wird die Gleichung von Zeuner*)

$$A\,(U_2 - U_1) = (q_2 - q_1) + (x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1) \quad . \quad (16)$$

zu Grunde gelegt.

Hierin bedeutet $q_2 - q_1$ die Wärmemenge, welche dem Wasser oder Eis von einer Temperatur $t_1$ zur Temperatur $t_2$ zuzuführen ist, wobei die Volumenänderung als verschwindend klein angenommen wird.

$x$ ist der Theil, welcher in dem Kilogramm Gemenge sich als Dampf vorfindet.

$\varrho$ bezeichnet Zeuner als die „innere latente Wärme“ und giebt dafür die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 575{,}40 - 0{,}791\,t \text{ Kal.} \\ \varrho' &= \frac{1}{A}\,\varrho = 243972 - 335{,}39\,t\ mkg \end{aligned}\right\} \quad . \quad (17)$$

#### a) Das Regenstadium.

Wir stellen uns 1 $kg$ Eis von $-273^0$ C., also $0^0$ absoluter Temperatur vor. Die spezifische Wärme des Eises bei dem als konstant betrachteten Volumen soll zu 0,5 Kalorien angenommen werden. Zur Erwärmung des Eises auf $0^0$ C. oder $273^0$ absoluter Temperatur sind demnach 136,5 Kalorien nöthig. Um das Kilogramm Eis von $0^0$ zu schmelzen, braucht man 79,1 Kalorien und zur Erwärmung des Wassers auf $t^0$ weitere $t$ Kalorien. Es wird also die spezifische Wärme des Wassers als konstant $= 1$ angenommen. So wird man für den Ausdruck $q_2 - q_1$ in Formel (16)

$$q_2 - q_1 = 136{,}5 + 79{,}1 + t = 215{,}6 + t \text{ Kalorien} \quad \text{(18)}$$

erhalten.

Da im Anfangszustand blos Eis angenommen war, hat man weiter in Formel (16)

$$x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1 = x\varrho \text{ Kalorien} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(19)}$$

zu setzen, welche also die Wärme darstellen, die bei Bildung von $x\ kg$ Dampf aus Wasser von $t^0$ zur Verrichtung der inneren Arbeit zuzuführen sind.

So erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A\,U &= 215{,}6 + t + x\varrho \text{ Kalorien} \\ U &= 91416 + 424\,t + x\varrho'\ mkg \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(XIV)}$$

#### b) Das Hagelstadium.

Für die Temperatur $0^0$ C. ergiebt sich nach Formel (XIV):

$$A\,U = 215{,}6 + 575{,}4\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(20)}$$

Nimmt man an, dass von den $1 - x\ kg$ Wasser sich $y\ kg$ Eis bilden, ohne dass Dampfmenge oder Volumen geändert werden, so tritt eine Entziehung von

$$79{,}1\,y \text{ Kalorien} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(21)}$$

ein und wird man also für die innere Arbeit in diesem Stadium folgende Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} A\,U &= 215{,}6 - 79{,}1\,y + 575{,}4\,x \text{ Kalorien} \\ U &= 91416 - 33538\,y + 243972\,x\ mkg \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(XV)}$$

#### c) Das Schneestadium.

1 $kg$ Eis von $0^0$ absoluter Temperatur auf $T^0 < 273$ erwärmt, erfordert 0,5 $T$ Kalorien. Werden hiervon $x\ kg$ in Dampf verwandelt, so müssen ihnen pro Kilogramm $79{,}1 + \varrho$, für $x\ kg$ also $x\,(70{,}1 + \varrho)$ Kalorien zur inneren Arbeit zugeführt werden. Wir erhalten folglich die Formel:

$$\left.\begin{aligned} A\,U &= 0{,}5\,T + x\,(79{,}1 + \varrho) \text{ Kalorien} \\ U &= 212\,T + x\,(33538 + \varrho')\ mkg \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(XVI)}$$

### D) Die innere Arbeit eines Gemenges atmosphärischer Luft mit Wasserdampf und Wasser resp. Eis.

Bei Aufstellung der Formeln für die Atmosphäre in ihren verschiedenen Zuständen kann man ohne Weiteres die Formeln der Abschnitte A) und C) verwenden. Man hat nur zu beachten, dass in 1 $kg$ des Gemenges $(1 - G_0)\ kg$ trockene atmosphärische Luft und $G_0\ kg$ gesättigter Wasserdampf, oder Dampf und Wasser, oder Dampf und Eis, oder endlich Dampf, Wasser und Eis vorhanden sind. Für $x$ ist in den Gleichungen (XIV) bis (XVI) der Werth $G : G_0$ nach den Gleichungen (VII) zu setzen.

#### a) Das Regenstadium.

Führt man die oben angegebenen Rechnungen aus, so erhält man:

*) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. II. Auflage. Seite 296.

$$\left.\begin{aligned} AU &= c(1-G_0)T + 215{,}6\,G_0 + G_0 t + G\varrho \text{ Kal.} \\ U &= 33{,}175\,ST + 122{,}71\,Re_0\,(215{,}6 + t) + \\ &\quad 122{,}71\,S\frac{c}{1-c}\,\varrho\ mkg \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVII)}$$

Als $c$ wird man hier die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Volumen 0,16844 einzustellen haben, und ist besonders zu beachten, dass in der zweiten Formel $\varrho$ und nicht $\varrho'$ nach Formel (17) zu nehmen ist.

### b) Das Hagelstadium.

Vor der Verbindung der Gleichungen (XII) und (XV) zur Ableitung des Ausdruckes für die innere Arbeit der Atmosphäre im Hagelstadium empfiehlt es sich, die Eismenge $y$ in Bruchtheilen der flüssigen und festen Bestandtheile $(1 - x)$ auszudrücken. Bezeichnet man mit $\varepsilon$ einen zwischen 0 und 1 schwankenden Werth, so dass

$$y = \varepsilon\,(1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

sein wird, so findet man

$$\left.\begin{aligned} AU &= 45{,}983(1-G_0) + 215{,}6\,G_0 - 79{,}1\,G_0\varepsilon + \\ &\quad G(575{,}4 + 79{,}1\,\varepsilon) \text{ Kalorien} \\ U &= 9057\,S + 26456\,Re_0 - 9706\,Re_0\varepsilon + \\ &\quad 122{,}71\,S(575{,}4 + 79{,}1\,\varepsilon)\frac{c}{1-c}\,mkg \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVIII)}$$

Für $\varepsilon = 0$ geht Gleichung (XVIII) in den Ausdruck über, den man erhält, wenn in Gleichung (XVII) $t = 0$, also $T = 273$ gesetzt wird.

### c) Das Schneestadium.

Die Verbindung der Gleichungen (XII) und (XVI) liefert

$$\left.\begin{aligned} AU &= c(1-G_0)T + c'\,G_0\,T + G(79{,}1 + \varrho) \text{ Kal.} \\ U &= 33{,}175\,ST + 61{,}354\,Re_0\,T + \\ &\quad 122{,}71\,S(79{,}1 + \varrho)\frac{c}{1-c}\,mkg \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIX)}$$

Für $T = 273$ gehen diese Formeln in die Ausdrücke über, welche Formel (XVIII) für $\varepsilon = 1$ liefern, $c' = 0{,}5$.

## E) Die innere Arbeit eines Gemenges von Luft und überhitztem Wasserdampf.

Wir haben bei dem Grundzustande $e_0$ im Kilogramm des Gemenges $(1 - G_0)\,kg$ atmosphärischer Luft und $G_0\,kg$ Wasserdampf. Die Verbindung der Gleichungen (XII) und (XIII) giebt also:

$$\left.\begin{aligned} AU &= c(1-G_0)T + A\,U_0\,G_0 + c''\,G_0(t - t_0) \text{ Kal.} \\ U &= 33{,}175\,ST + 0{,}2894\,Re_0\,U_0 + \\ &\quad 41{,}72\,Re_0\,(t - t_0)\,mkg \end{aligned}\right\} . \quad \text{(XX)}$$

Hierin ist $c = 0{,}16844$ die spezifische Wärme der trockenen Luft, $c'' = 0{,}34$ diejenige des überhitzten Wasserdampfes.

## VI. Die Differentialgleichungen der mechanischen Wärmetheorie.

Wir gehen von der Gleichung

$$dQ = A\,dU + A\,p\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

aus, worin $dQ$ die Wärmemenge in Kalorien darstellt, welche einem Körper bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung zuzuführen oder zu entziehen ist, je nachdem $dQ$ positiv oder negativ bei der Rechnung erscheint.

$A\,dU$ ist der Theil von $dQ$, der zur Veränderung der inneren Arbeit verwendet wird, und $A\,p\,dv$ derjenige, welcher bei Verrichtung äusserer Arbeit verbraucht oder erzeugt wird, je nachdem eine Vergrösserung oder Verminderung des Volumens bei der Zustandsänderung stattfindet. Vorausgesetzt wird die beständige Gleichheit des äusseren und inneren Druckes.

Dies ist allerdings hier nur angenähert der Fall, da zwar der Gesammtdruck einer Luftmenge sich mit dem der Umgebung in Gleichgewicht setzen wird, die Partialdrucke aber wegen Langsamkeit der Diffusion des Wasserdampfes mehr oder weniger abweichen müssen. Man wird sich also bei Anwendung der folgenden Formeln die Luftmenge, deren Zustandsänderung untersucht wird, in eine Hülle geschlossen denken, die aber jeder Volumenänderung widerstandslos nachgiebt.

Da wir den Druck in Quecksilbersäule messen, in Formel (23) aber unter $p$ der Druck in Kilogrammen auf einen Quadratmeter zu verstehen ist, haben wir die Formel (23) nach (2) in der Gestalt

$$dQ = A\,dU + A\,\gamma'\,b\,dq \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zu schreiben, worin $\gamma'$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet und $dq$ die Aenderung des spezifischen Volumens sein wird. Verwendet man zur Herleitung des Differentiales $dU$ die ersten Formen der Gleichungen (XVII) bis (XX), so erhält man:

### A) Feuchtzustand . . . (XXI)

a) Regenstadium.

$$0 = dQ - [c\,(1 - G_0) + G_0]\,dt - d(G\varrho) - A\gamma'\,b\,dq.$$

b) Hagelstadium.

$$0 = dQ - 79{,}1\,G_0\,d\varepsilon - d(G[\varrho]) - A\gamma'\,b\,dq.$$

c) Schneestadium.

$$0 = dQ - [c(1 - G_0) + c'\,G_0]\,dt - d(G[\varrho]) - A\gamma'\,b\,dq.$$

### B) Trockenzustand.

$$0 = dQ - [c\,(1 - G_0) + c''\,G_0]\,dt - A\gamma'\,b\,dq.$$

Hierin ist ausser den bekannten Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} [\varrho] &= [575{,}4 + 79{,}1\,\varepsilon] \text{ im Hagelstadium} \\ [\varrho] &= [79{,}1 + \varrho] \text{ im Schneestadium} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (25)$$

zur Abkürzung eingeführt worden.

In den vorstehenden Formen werden die Differentialgleichungen später Verwendung finden.

Etwas andere, für die Rechnung mit Differential-

quotienten bequemere Formen erhält man durch Verwendung der zweiten Formen der Gleichungen (XVII) bis (XX), und zwar liefern diese:

A) **Feuchtzustand** . . . (XXII)

a) Regenstadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ - [0{,}27036\,b + (e_0' - 0{,}791\,e')\,b + \beta^2\varrho s' + 0{,}1108\,(b + \beta Ts')\,\beta]\,dt + \beta^2[\varrho e + 0{,}1108\,T]\,db.$$

b) Hagelstadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ + 79{,}1\,(e_0' - e')\,b\,d\varepsilon + ([\varrho]\,e' + 30{,}25\,\beta)\,\beta\,db.$$

c) Schneestadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ - [0{,}27\,036\,b + (0{,}5\,e_0' - 0{,}791\,e')\,b + \beta^2[\varrho]s' + 0{,}1108(b + \beta Ts')\beta]\,dt + \beta^2([\varrho]e + 0{,}1108\,T)db.$$

B) **Trockenzustand.**

$$0 = 31{,}186\,\frac{b}{R}\,dQ - b\,[3{,}440 + 0{,}6289\,e_0]\,dt + T\,db.$$

Als Abkürzungen wurden hierin eingeführt:

$$\beta = \frac{b}{b - s},\quad e_0' = \frac{e_0}{1 - e_0},\quad e' = \frac{e}{1 - e} \qquad (26)$$

$$s' = \frac{ds}{dt} = 0{,}3368 + 0{,}20372\,(0{,}1\,t) + 0{,}05375\,(0{,}1\,t)^2 + 0{,}01278(0{,}1\,t)^3 + 0{,}00125(0{,}1\,t)^4 - 0{,}000336(0{,}1\,t)^5 \qquad (27)$$

Bei Ueberschlagsrechnungen kann man unbedenklich

$$\beta = 1,\quad e_0 = e_0',\quad e = e' \text{ und}$$
$$(e_0' - 0{,}791\,e') \text{ ev. } (0{,}5\,e_0' - 0{,}791\,e') = 0 \qquad (28)$$

setzen. Hierdurch erlangen die Formeln (XXII) die wesentlich einfacheren Formen.

A) **Feuchtzustand** . . . (XXIIa)

a) Regenstadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ - [0{,}27036\,b + \varrho s' + 0{,}1108(b + Ts')]\,dt + [\varrho e + 0{,}1108\,T]\,db.$$

b) Hagelstadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ + 79{,}1\,(e_0 - e)\,b\,d\varepsilon + ([\varrho]e + 30{,}25)\,db.$$

c) Schneestadium.

$$0 = 3{,}4553\,\frac{b}{S}\,dQ - [0{,}27036\,b + [\varrho]s' + 0{,}1108(b + Ts')]\,dt + ([\varrho]e + 0{,}1108\,T)\,db.$$

B) **Trockenzustand.**

$$0 = 31{,}186\,\frac{b}{R}\,dQ - b\,[3{,}440 + 0{,}6289\,e_0]\,dt + T\,db.$$

## VII. Die adiabatischen Zustandsänderungen.

Von den vielen Verwendungen, deren die Formeln in den Abschnitten V und VI fähig sind, möge hier blos deren Anwendung auf die adiabatischen Zustandsänderungen, bei denen dem Luftquantum, das diesen Aenderungen unterworfen wird, Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, behandelt werden.

Derartige Vorgänge treten in der Atmosphäre zweifellos mehr oder weniger vollkommen auf, und sie sind es, welche man bei den bisherigen theoretischen Betrachtungen der Bewegungserscheinungen der Atmosphäre ausschliesslich behandelt hat.

Zur Ableitung der Gleichungen der adiabatischen Linien, d. h. der Linien, welche das Gesetz der Abhängigkeit zwischen Temperatur und Druck einer sich in adiabatischer Zustandsänderung befindlichen Luftmenge zur Darstellung bringen, hat man in den Gleichungen des Abschnittes VI einfach

$$dQ = 0 \qquad (29)$$

zu setzen. Verhältnissmässig einfache Differentialquotienten liefern für Ueberschlagsrechnungen die Gleichungen (XXIIa).

A) **Feuchtzustand** . . . (XXIII)

a) Regenstadium.

$$\frac{dt}{db} = \frac{\varrho e + 0{,}11\,T}{0{,}27\,b + \varrho s' + 0{,}11\,(b + Ts')}.$$

b) Hagelstadium.

$$\frac{d\varepsilon}{db} = -\frac{[\varrho]e + 30{,}25}{79{,}1\,(e_0 - e)b}.$$

c) Schneestadium.

$$\frac{dt}{db} = \frac{[\varrho]e + 0{,}11\,T}{0{,}27\,b + [\varrho]s' + 0{,}11\,(b + Ts')}.$$

B) **Trockenzustand.**

$$\frac{dt}{db} = \frac{1}{\mu}\,\frac{T}{b}.$$

In der letzten Gleichung wurde

$$\mu = 3{,}440 + 0{,}6289\,e_0 \qquad (30)$$

gesetzt.

Zur Ableitung der Gleichung der adiabatischen Linien greifen wir auf die Gleichungen (XXI) zurück.

Für das Regenstadium finden wir zunächst

$$0 = [c(1 - G_0) + G_0]\,dt + d(G\varrho) + A\gamma' b\,d\varphi$$
$$= [c(1 - G_0) + G_0]\,dt + d(G\varrho) + A\gamma' s\,d\varphi + A\gamma' S\,dt - A\gamma' ST\,\frac{d(b - s)}{b - s}$$
$$= [c(1 - G_0) + G_0 + A\gamma' S]\,dt - A\gamma' ST\,\frac{d(b - s)}{b - s} + d(G\varrho) + A\gamma' s\,d\varphi.$$

Hierin lassen sich wesentliche Vereinfachungen vornehmen. Zunächst führen wir zur Abkürzung eine Kon-

stante $C_1$ (natürlich nur bei unverändertem Grundzustand) ein, die folgendermaassen bestimmt sein soll:

$$C_1 = c(1 - G_0) + G_0 + A\gamma' S \quad . \quad . \quad (31)$$

Weiter hat man zu berücksichtigen, dass das Volumen der Einheit der Luftmasse zugleich das Volumen von $G$ *kg* gesättigten Wasserdampfes von $T^0$ und dass $\gamma' s = p$ die Spannung des Dampfes in Kilogrammen für den Quadratmeter gemessen ist. Bezeichnet man mit $u$ das spezifische Volumen des Wasserdampfes von der Temperatur $T$, so ist auch $\varphi = Gu$, also $d\varphi = d(Gu)$, und es lassen sich die beiden letzten Glieder der Differentialgleichung in der Form

$$d(G\varrho) + A\gamma' s d\varphi = d(G\varrho) + Apd(Gu)$$

schreiben.

Endlich hat man die Gleichungen*) der mechanischen Wärmetheorie heranzuziehen:

$$r = \varrho + Apu \qquad \frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt} \quad . \quad (32)$$

Führt man diese Relationen ein, so erhält man

$$d(G\varrho) + A\gamma' s d\varphi + Td\left(\frac{Gr}{T}\right)$$

und so gestaltet sich die Differentialgleichung der adiabatischen Linien in

$$0 = C_1 dt - A\gamma' ST\frac{d(b-s)}{b-s} = Td\left(\frac{Gr}{T}\right),$$

oder nach Division mit $T$:

$$0 = C_1\frac{dT}{T} - A\gamma' S\frac{d(b-s)}{b-s} + d\left(\frac{Gr}{T}\right).$$

Die Integration liefert

$$0 = C_1 l\cdot n\cdot T - A\gamma' Sl\cdot n\cdot(b-s) + \frac{Gr}{T} + \text{Konst.}$$

Für das Schneestadium gestaltet sich die Rechnung ähnlich. In der Gleichung

$$0 = C_1 dt - A\gamma' ST\frac{d(b-s)}{b-s} + d(G[\varrho]) + A\gamma' s d\varphi$$

setzt man:

$$d(G[\varrho]) + A\gamma' s d\varphi = d(G[\varrho]) + Apd(Gu),$$

$$[r] = [\varrho] + Apu \qquad \frac{[r]}{u} = AT\frac{dp}{dt} \quad . \quad . \quad (33)$$

und erhält

$$0 = C_1\frac{dT}{T} - A\gamma' S\frac{d(b-s)}{b-s} + d\left(\frac{G[r]}{T}\right),$$

$$0 = C_1 l\cdot n\cdot T - A\gamma' Sl\cdot n\cdot(b-s) + \frac{G[r]}{T} + \text{Konst.}$$

Wenn man also von dem geringen Unterschiede in der Bedeutung der Konstanten $C_1$ absieht, so unterscheiden sich die Gleichungen für das Regenstadium und Schneestadium einfach dadurch, dass im letzteren der Ausdruck $[r]$ für die in erstere eingeführte Grösse $r$ erscheint, wie dies schon die Herren Mohn, Guldberg, Hertz und von Bezold behauptet resp. gethan haben.

$$\left.\begin{aligned} r &= \varrho + Apu = 606{,}5 - 0{,}695\,t \text{ und} \\ [r] &= [79{,}1 + r] = 685{,}6 - 0{,}695\,t \end{aligned}\right\} . \quad (34)$$

ist die gesammte Verdampfungswärme, welche, bei Verwandlung von 1 *kg* Wasser von $t^0$ in 1 *kg* Dampf derselben Temperatur zugeführt, nicht nur die innere Arbeit leistet, sondern auch zur Herstellung des Volumens $u$ den äusseren, und zwar dem Dampfdruck gleichen Widerstand überwindet, wobei der hierzu nöthige Theil $Apu$ verbraucht wird und nur $\varrho$ in Form von Wärme im Dampf verbleibt.

Unsere Rechnung stützt sich also auf die Annahme, dass für Dampf über der Temperatur 0° C.

$$\frac{r}{u} = A\cdot T\frac{dp}{dt},$$

aber für Dampf unter der Temperatur 0° C.

$$\frac{[r]}{u} = A\cdot T\frac{dp}{dt}$$

ist und dass also bei 0° C. die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{606{,}5}{u} &= A\,273\,\frac{dp}{dt} \\ \text{und} \\ \frac{685{,}6}{u} &= A\,273\,\frac{dp}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

gelten müssen.

Für $u$ giebt Clausius*) den Werth 205. Beachtet man noch, dass $\frac{dp}{dt} = \gamma'\frac{ds}{dt}$ ist, so erhält man aus den Formeln (35)

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 0{,}337 \text{ für Temperatur über } 0^0 \\ \frac{ds}{dt} &= 0{,}387 \;\;„ \qquad „ \qquad \text{unter } 0^0 \end{aligned}\right\} . \quad (36)$$

Man muss sich also, wie dies auch die Meinung von Clausius ist, vorstellen, dass die Kurve der Dampfspannung aus zwei Theilen besteht, die bei 0° derart zusammentreffen, dass ein Knick entsteht. Stellt man sich die Kurven derart konstruirt vor, dass für 1° C. und 1 *mm* Spannung dieselbe Länge gewählt wurde, so trifft die Kurve der Spannungen unter 0° mit einem Winkel von 20°55′ bei der Abszisse 0° C. ein, während die Kurve der Spannungen über Null mit dem Winkel 18°40′ beginnt.

Für das Hagelstadium erhalten wir aus (XXI):

$$0 = 79{,}1\,G_0\,d\varepsilon - d(G[\varrho]) - A\gamma' b d\varphi.$$

Wird mit $a$ die Dampfspannung bei 0° C. bezeichnet,

*) Zeuner. Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. II. Auflage. Seite 271 und 274.

*) Die mechanische Wärmetheorie. III. Auflage. 1887. I. Band, Seite 178 ff.

also $4 \cdot 6\ mm = a$ gesetzt, so bestimmt sich $d\varphi$ aus der Gleichung $\varphi(b-a) = 273\ S$ und man erhält

$$0 = 79{,}1\ G_0\, d\varepsilon - d(G[\varrho]) + 273\ A\gamma' S \frac{b}{(b-a)^2}\, db.$$

Die Integration liefert

$$0 = 79{,}1\ G_0\, \varepsilon - G[\varrho] + 273\ A\gamma' S \left\{ l \cdot n \cdot (b-a) - \frac{a}{b-a} \right\} + \text{Konst.}$$

Die Differentialgleichungen ergeben für den Trockenzustand weiter:

$$0 = [c(1-G_0) + c''\ G_0]\, dt - A\gamma' b\, d\varphi,$$

worin sich $d\varphi$ aus der Gleichung

$$\varphi b = RT$$

bestimmt. Dies liefert die Gleichung

$$0 = C_1 \frac{dT}{T} - A\gamma' R \frac{db}{b}$$

und giebt deren Integration

$$0 = C_1\, l \cdot n \cdot T - A\gamma' R\, l \cdot n \cdot b + \text{Konst.}$$

Uebrigens ergiebt die Gleichung (XXIII)

$$\frac{db}{b} = \mu \frac{dT}{T}$$

und liefert dies

$$\log b = \mu \log T + \text{Konst.},$$

worin $\mu$ nach Formel (30) bestimmt ist.

Wir können somit die Gleichungen für die adiabatische Linie zusammenstellen.

A) **Feuchtzustand** . . . (XXIV)

a) Regenstadium.

$$0 = C_1 \log T - C_2 \log(b-s) + M \frac{Gr}{T} + \text{Konst.}$$

b) Hagelstadium.

$$0 = C_1\, \varepsilon - G[\varrho] + 273\ C_2 \left[ \frac{1}{M} \log(b-a) - \frac{a}{b-a} \right] + \text{Konst.}$$

c) Schneestadium.

$$0 = C_1 \log T - C_2 \log(b-s) + M \frac{G[r]}{T} + \text{Konst.}$$

B) **Trockenzustand.**

$$0 = C_1 \log T - C_2 \log b + \text{Konst.}$$
$$= \mu \log T - \log b + \text{Konst.}$$

Hierin bedeuten

$M = 0{,}43\,429$ den Modul der gemeinen Log.,
$G$ nach Formel (VII) das Gewicht des Wasserdampfes in der Luft,
$r$ und $[r]$ nach Formel (34) die latente Verdampfungswärme,
$[\varrho]$ nach Formel (25) die innere Verdampfungswärme,
$T = 273 + t$ die absolute Temperatur,
$b$ den Barometerstand in Millimetern,
$s$ die Spannung des Dampfes von $t^0$,
$a = 4{,}6\ mm$ Spannung des Dampfes von $0^0$,
$\mu$ nach Formel (30) einen Koëffizienten,
$\varepsilon$ den Bruchtheil des in Luft von $0^0$ C. enthaltenen kondensirten Dampfes, der als Eis vorhanden ist (0,0 bis 1,0). . (37)

Für die Konstante $C_1$ gelten die Gleichungen

A) **Feuchtzustand** . . . . (38)

$C_1 = c(1-G_0) + G_0 + A\gamma' S$ im Regenstadium,
$C_1 = 79{,}1\ G_0$ „ Hagelstadium,
$C_1 = c(1-G_0) + c'\ G_0 + A\gamma' S$ „ Schneestadium.

B) **Trockenzustand.**

$$C_1 = c(1-G_0) + c''\ G_0 + A\gamma' R,$$

worin $c$ die spezifische Wärme der Luft, $c'$ diejenige des Eisens, $c''$ diejenige des Wasserdampfgases, $\gamma'$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers, $S$ und $R$ die Konstanten der Zustandsgleichungen bedeuten, und weiter ist

$C_2 = A\gamma' S$ im Feuchtzustande
$C_2 = A\gamma' R$ „ Trockenzustande . . (39)

Die Integrationskonstanten in den Gleichungen (XXIV) müssen aus zusammengehörigen bekannten Werthen von $b$, $s$ und $t$ bestimmt werden.

## VIII. Die Zustandsgleichungen für eine vertikale Luftsäule.

Der Zustand einer Luftsäule wird wie derjenige irgend eines Volumenelementes durch Druck, Temperatur und Wasserdampfgehalt bestimmt, wozu noch der Bewegungszustand kommt.

Da aber in der Luftsäule diese Elemente sich mit der Höhe ändern, wird es nöthig sein, die Gesetze dieser Aenderungen zu kennen, wenn man einen bestimmten Ausdruck für den Zustand der Säule angeben soll.

Die gebräuchlichste Form der Zustandsgleichung für eine ruhende Luftsäule von der Höhe $h$ stellt die barometrische Höhenformel dar, welche selbst in den mannigfaltigsten Ausdrücken vorkommt, bei denen aber meist die Grundanschauungen Laplace's beibehalten wurden.

Hier soll diese Form absichtlich verwendet werden, weil sie so allgemein eingeführt ist, dass es schwer sein wird, sie durch Formeln, welche auf etwas anderen Grund-

lagen entwickelt wurden, zu verdrängen; sie wird in der Form von Rühlmann

$$h = 8003{,}6\, l \cdot n \cdot \frac{b_1}{b_2}\,(1 + 0{,}003\,665\, t)\,(1 + 0{,}378\, \varphi) \quad (40)$$

geschrieben.

Hierin ist also:

$h$ die Höhe der Luftsäule in Metern,
$b_1$ der Barometerstand am Fusse der Luftsäule,
$b_2$ „ „ „ oberen Ende der Luftsäule,
$t$ die mittlere Temperatur,
$\varphi$ der mittlere Druckquotient. (41)

Sind $t_1$ und $t_2$ die Temperaturen unten und oben, so wird

$$t = {}^1/_2\,(t_1 + t_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

sein, und werden die Dunstspannungen unten und oben mit $\sigma_1$ und $\sigma_2$ bezeichnet, so ist:

$$\varphi = {}^1/_2 \left( \frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2} \right) = {}^1/_2\,(e_1 + e_2) \quad . \quad . \quad (43)$$

Die Glieder mit der Schwerekorrektion können vernachlässigt werden. Sie sind so klein, dass es unbegreiflich ist, wie man sich bei Rechnungen vorliegender Art mit denselben herumschlagen kann.

Da es sich hier darum handelt, die Abnahme des Barometerstandes mit der Höhe als Funktion derselben darzustellen, wird man die Höhenformel umformen müssen.

Es sei

$$k = \frac{h}{8003{,}6\,(1 + 0{,}003\,665\, t)\,(1 + 0{,}378\, \varphi)} \quad (44)$$

was

$$\log.\ \text{nat.}\ \frac{b_1}{b_2} = k$$

$$b_1 = b_2\, e^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

ergiebt, worin natürlich $e$ nicht der Druckquotient, sondern die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Man kann hier die sehr rasch konvergirende Reihe für $e^k$ anwenden, da ja $k$ stets ein kleiner echter Bruch sein wird, und erhält:

$$b_1 - b_2 = k + {}^1/_2\, k^2 + {}^1/_6\, k^3 + \ldots \quad . \quad . \quad (46)$$

Nach Formel (46) wird man also die Differenz der Barometerstände am unteren und oberen Ende einer Luftsäule von $h$ $m$ Höhe berechnen können und erhält durch Multiplikation dieser Differenz mit dem spezifischen Gewicht des Quecksilbers direkt das Gewicht der Luftsäule bei 1 $qm$ Querschnitt.

Allerdings ist dabei vorausgesetzt, dass die mittleren Werthe von Temperatur und Druckquotient bekannt sind. Liegen nur Bestimmungen von $t_1$ und $e_1$ vor, so wird man $t_2$ und $e_2$ auf irgend eine Weise zu berechnen suchen müssen.

### Die Abnahme der Temperatur mit der Höhe.

Unter den verschiedenen Theoremen bezüglich der Abnahme der Temperatur mit der Höhe ist dasjenige, wonach

$$\frac{dt}{dh} = \text{Konstant}$$

ist, das einfachste und wie es scheint am meisten bewährte, soweit nicht allzugrosse Höhen in Betracht kommen. Wir wollen dasselbe deshalb hier annehmen und in der Form

$$\frac{dt}{dh} = -\,0{,}007 + 0{,}0005\, q \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

schreiben.

0,007 ist die Abnahme der Temperatur für 1 $m$ Höhe in der heissen Jahreszeit. Um auch die grösseren und kleineren Koëffizienten in die Formeln einzubeziehen, wurde die Grösse $q$ eingeführt, welche also folgendermaassen anzunehmen ist:

| $dt:dh$ | $q$ | $dt:dh$ | $q$ |
|---|---|---|---|
| — 0,007 | 0 | — 0,008 | — 2 |
| — 0,006 | + 2 | — 0,009 | — 4 |
| — 0,005 | + 4 | — 0,010 | — 6 |
| — 0,004 | + 6 | u. s. w. | u. s. w. |
| — 0,003 | + 8 | | |
| — 0,002 | + 10 | | |
| — 0,001 | + 12 | | |
| — 0,000 | + 14 | | |
| + 0,001 | + 16 | | |
| u. s. w. | u. s. w. | | |

### Die Abnahme der Dunstspannung mit der Höhe.

Hier soll einfach die von Hann im 9. Bande der Zeitschrift der Oesterr. Gesellschaft für Meteorologie gegebene Formel

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left\{ 1 - 0{,}000\,246\, h + 0{,}000\,000\,0157\, h^2 \right\} \quad (48)$$

Verwendung finden.

Führt man die Gleichungen (47) und (48) in Formel (46) ein, so erhält man als Resultat die nachstehenden

### Zustandsgleichungen einer Luftsäule.

$$t_2 = t_1 - 0{,}007\, h + 0{,}0005\, h\, q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XXV})$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left\{ 1 - 0{,}000\,246\, h + 0{,}000\,000\,0157\, h^2 \right\},$$

$$b_2 = b_1 - h\,[(124{,}94 \times 10^{-6} - 4{,}58 \times 10^{-7}\, t_1 + 1{,}68 \times 10^{-9}\, {t_1}^2 - 0{,}06 \times 10^{-10}\, {t_1}^3)\, b_1 - 0{,}47 \times 10^{-4}\, \sigma_1 + 0{,}17 \times 10^{-6}\, t_1\, \sigma_1]$$
$$+ h^2\,[(6{,}20 \times 10^{-9} - 0{,}45 \times 10^{-10}\, t_1 + 0{,}26 \times 10^{-2}\, {t_1}^2 + 1{,}14 \times 10^{-10}\, q - 0{,}08 \times 10^{-11}\, t_1\, q)\, b_1 - 0{,}11 \times 10^{-7}\, \sigma_1]$$
$$- h^3\,[0{,}13 \times 10^{-12} - 0{,}03 \times 10^{-13}\, t_1]\, b_1.$$

Nach der letzten Gleichung wird man $b$ als Funktion der Höhe darstellen können und man erkennt, dass die

Abweichung der Abnahme der Temperatur von $0{,}007^0$ für den Meter nur auf das quadratische Glied einwirkt.

Die Reihe wurde vom Autor entwickelt und zuerst in der „Leopoldina", November 1884 (XX), allerdings in etwas anderer Gestalt, publizirt.

---

II. Theil.

## Einige Beispiele der Verwendung der Grundgleichungen.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, sind die Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre so verwickelter Natur, dass die Arten der hier auftretenden Probleme nur angedeutet werden können.

Als einfachste Aufgabe wird die erscheinen, dass in der ruhenden oder mit gleichmässiger Geschwindigkeit horizontal dahinströmenden Atmosphäre kleine Luftmassen auf- und niedersteigen. An gewissen Stellen werden sich irgend welche Luftmassen nach oben in Bewegung setzen und an anderen Stellen werden entsprechende Mengen sinken. Diese Bewegungen werden je nach dem Zustande der Atmosphäre, rasch oder langsam, auf kurzen oder langen Strecken vor sich gehen, und sie werden es sein, durch welche Wärme und Wasserdampf von der Erdoberfläche den grösseren Höhen der Atmosphäre zugeführt werden.

Wesentlich verschieden hiervon werden die Vorgänge sein, bei denen eine mehr oder weniger scharf abgegrenzte Säule besteht, in der die Luft vom Erdboden oder auch von einer beliebigen Höhe aus sich etwa so in aufsteigender Bewegung befindet, wie dies in einem Schornstein der Fall ist. Eine solche Säule wird meist von rotirenden Luftmassen umgeben sein, welche die starren Wände des Schornsteines durch die auf dem Trägheitsgesetze basirenden Kraftwirkungen mehr oder weniger ersetzen. Unten wird Luft zu-, oben ausströmen, und es wird ringsherum ein Niedersinken von Luft stattfinden müssen.

Weiter können wir uns einen Luftstrom von irgend welcher Höhe denken, der nahezu horizontal oder mit irgend einer Neigung dahinströmt, auf seinem Wege aber durch die Beschaffenheit der Erdoberfläche die verschiedensten Einwirkungen findet. Es kann sich einem solchen Luftstrom irgend welches Objekt, ein Berg, ein Gebirgszug, ein Wald oder irgend etwas anderes entgegenstellen; ein Theil der Luft kann in ein Thal eindringen u. s. w. Alles dies wirkt modifizirend auf die Bewegung ein und wird somit zu Aenderungen in den Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnissen und zu Kondensationsvorgängen Veranlassung geben können.

Hier möge die einfachste Form der Bewegungsvorgänge behandelt werden; es soll nur gezeigt werden, wie man sich die Anwendung der Formeln des I. Theiles denken kann.

Wir stellen uns die Atmosphäre ruhend vor und nehmen an, dass sich von irgend einer Stelle weg die Einheit der Masse, also 1 *kg* Luft in Bewegung setze. Weiter stellen wir uns vor, dass diese Luftmasse in eine Hülle eingeschlossen sei, welche gewichts- und widerstandslos alle Volumenänderungen gestattet. Das Ganze wird somit gewissermaassen einen Ballon von 1 *kg* Gewicht, also etwa 1 *cbm* Rauminhalt darstellen und soll der Kürze und Deutlichkeit halber in den folgenden Ausführungen von dem „Ballon" gesprochen werden.

Bei der Bewegung dieses Ballons wird angenommen werden können, dass der Druck der Luft im Ballon stets sich mit dem der Umgebung in Gleichgewicht setzt. Der Druck $b$ wird also stets durch den Zustand der Atmosphäre gegeben sein.

Anders ist dies mit Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt. Findet die Bewegung rasch statt, so wird die adiabatische Zustandsänderung der Luft im Ballon als diejenige zu betrachten sein, der die thatsächliche Zustandsänderung am nächsten kommt. Bei langsamerer Bewegung wird aber wenigstens an der Berührungsstelle zwischen Ballon und umgebender Luft ein Ausgleich der Temperaturen stattfinden, so dass die Temperatur im Ballon keine gleichmässige sein wird, sondern als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkte in kugelförmiger Anordnung gedacht werden kann. Ist die Bewegung sehr langsam, so wird Temperaturausgleich in der ganzen Masse anzunehmen sein. Das müsste auch mit dem Feuchtigkeitsgehalte sein. Es müsste die Dunstspannung sich mit der Umgebung in Ausgleich setzen, wenn die vorausgesetzte Hülle nicht nur diatherman, sondern auch für Wasserdampf durchdringlich angenommen wird.

Für diese Formen der Zustandsänderung sollen folgende kurze Ausdrücke angenommen werden.

Voller Ausgleich möge der Vorgang genannt werden, wobei $b$, $t$ und $\sigma$ resp. $s$ sich gleich den Werthen gestalten, welche die Atmosphäre dort hat, wohin der Ballon kommt resp. gebracht wird.

Temperaturausgleich wird dann vorhanden sein, wenn die innere Temperatur sich den Temperaturen der Atmosphäre anschmiegt, und

adiabatische Aenderung wird die sein, wobei nur Ausgleichung des Druckes, sonst aber die Aenderungen der Temperatur und damit zusammenhängend des Feuchtigkeitsgehaltes stattfinden, welche durch die Arbeitsleistungen bei der Volumenänderung bedingt werden, wenn Wärme weder zugeführt noch abgeleitet wird.

Wir beginnen mit

### 1) Der Feststellung des Zustandes der Atmosphäre.

Am Erdboden soll

$$b_1 = 760\ mm, \quad t_1 = +30^0\ \text{C.}, \quad \sigma_1 = 19\ mm$$

sein.

Wir nehmen an, dass die Temperatur mit der Höhe gleichmässig abnimmt, und zwar, der hohen Temperatur entsprechend, nach der üblichen Annahme um $0{,}7^0$ C. für je 100 *m*. Bezüglich der Feuchtigkeit wird die Gültigkeit der Formel von Hann (Formel 48) vorausgesetzt.

In Formel (47) haben wir alsdann $q = 0$ zu setzen und erhalten nach den Gleichungen (47), (48) und (XXV)

$$t = 30{,}0^0 - 0{,}007\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

$$\sigma = 19{,}0 - 0{,}00\,467\,h + 0{,}000\,000\,298\,h^2 \quad . \quad . \quad (50)$$

$$b = 760{,}0 - 0{,}08\,474\,h + 0{,}000\,003\,655\,h^2 - 0{,}000\,000\,000\,030\,4\,h^3 + \ldots . \quad . \quad (51)$$

Es wird zweckmässig sein, die Aussagen dieser Gleichungen dadurch darzustellen, dass die nach ihnen sich ergebenden Werthe von $t$, $\sigma$ und $b$ für bestimmte Höhen nebeneinander gestellt werden.

Dabei wird es ausreichen, bis zu 5000 *m* Höhe zu gehen und die Berechnung von 1000 zu 1000 *m* auszuführen. Hierbei wird man noch zwei Zahlenreihen hinzunehmen können. Während nämlich Gleichung (50) die Dunstspannung ergiebt, welche in der Höhe $h$ zu erwarten ist, lässt sich durch die aus Gleichung (49) folgende Temperatur $t$ der Maximalwerth $s$ finden. Beide Feuchtigkeitszahlen geben dann nach der bekannten Beziehung die relative Feuchtigkeit $r$ für die in Frage stehende Höhe $h$.

| Höhe | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 *m* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 760,0 | 678,9 | 604,9 | 537,9 | 477,6 | 423,9 *mm* |
| $t$ | 30,0 | 23,0 | 16,0 | 9,0 | 2,0 | $-5{,}0^0$ C. |
| $\sigma$ | 19,0 | 14,6 | 10,9 | 7,7 | 5,1 | 3,1 *mm* |
| $s$ | 31,5 | 20,9 | 13,5 | 8,6 | 5,3 | 3,2 *mm* |
| $r$ | 60 | 70 | 81 | 90 | 96 | 97 Proz. |

Das Ergebniss der Rechnung besteht hauptsächlich in der Erkenntniss, dass bis zu 5000 *m* Höhe die Atmosphäre sich im Trockenzustande befindet. Die Dunstspannungen werden deshalb korrekt mit $\sigma'$ bezeichnet, wenn auch in den grösseren Höhen der Grenzzustand nahezu vorhanden ist.

Wir können nun weiter berechnen

$$e_0 = \sigma : b \quad \text{nach Gleichung (IV)} \quad . \quad . \quad (52)$$

$$R = \frac{1}{m - n e_0} \quad \text{„ „ (IX)} \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\gamma = \frac{1}{\varphi} = \frac{b}{RT} \quad \text{„ „ (X)} \quad . \quad . \quad (54)$$

$$G_0 = (m - n)\,R e_0 \quad \text{„ „ (IIIa)} \quad . \quad . \quad (55)$$

Die vorstehenden Ausdrücke lassen erkennen, dass man unter Berücksichtigung der Gleichungen (49) bis (51) Druckquotient, spezifisches Gewicht und Wasserdampfgewicht als Funktionen der Höhe darstellen kann, und zwar für jede Grösse eine nach Potenzen von $h$ fortschreitende Reihe erhält.

Da jedoch diese Ausdrücke hier nicht gebraucht werden, wurden die Entwickelungen unterlassen, dagegen fand eine Ableitung der für die bereits angenommenen Höhen geltenden Zahlenwerthe statt, welche folgendermaassen gefunden wurden:

| $h$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 *m* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | 0,0250 | 0,0215 | 0,0180 | 0,0143 | 0,0107 | 0,0073 |
| $R$ | 2,1733 | 2,1704 | 2,1675 | 2,1644 | 2,1614 | 2,1587 |
| $\gamma$ | 1154,1 | 1056,8 | 965,6 | 881,3 | 803,5 | 732,7 *g* |
| $G_0$ | 15,7 | 13,5 | 11,3 | 9,0 | 6,7 | 4,6 *g* |

Als Resultat geht hieraus hervor, dass der Grundzustand nach oben gleichmässig abnimmt. Der Druckquotient geht auf ein Drittel, der Wasserdampfgehalt auf fast ein Viertel zurück.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, zu ermitteln, welche Werthe die Dunstspannung annehmen würde, wenn man Proben der Luft aus den verschiedenen Höhen bei irgend einem Drucke $b_0$ in den Grenzzustand bringen wollte und welche Temperaturen man alsdann diesen Proben ertheilen müsste. Man findet für

$$b_0 = 800\ mm.$$

| $h$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 *m* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | 0,0250 | 0,0215 | 0,0180 | 0,0143 | 0,0107 | 0,0073 |
| $s_0$ | 20,0 | 17,2 | 14,4 | 11,4 | 8,6 | 5,8 *mm* |
| $t_0$ | 22,3 | 19,8 | 17,0 | 13,4 | 9,1 | $3{,}4^0$ C. |

Das spezifische Gewicht ändert sich ebenfalls bedeutend. Während unten der Kubikmeter Luft 1154,1 *g* wiegt, ist das Gewicht desselben Volumens in 5000 *m* Höhe 732,7 *g*.

## 2) Der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre.

Die Reihe der $\gamma$ lässt erkennen, dass trotz der Abnahme der Temperatur von $+ 30^0$ auf $5^0$ doch eine beständige Verminderung der Dichtigkeit der Luft mit der Höhe vorhanden ist, also spezifisch leichtere Schichten auf dichteren ruhen und somit eine Ursache der Bewegung direkt nicht gegeben ist. Tritt aber an irgend einer Stelle eine Störung des Gleichgewichtes, also eine Bewegung einer Luftmasse (Ballon) nach oben oder unten ein, so ändert sich hierbei das spezifische Gewicht dieser Masse. Dabei können drei Fälle eintreten. Ist die Aenderung des spezifischen Gewichtes des Ballons gleich der in der Atmosphäre, so wird der Ballon in jeder Lage im Gleichgewicht sein. Nimmt dagegen das spezifische Gewicht im Ballon beim Aufsteigen rascher ab als das der Atmosphäre, so wird der Ballon sich weiter bewegen, nach oben oder auch nach unten, je nach der Richtung des ersten Impulses. Ist aber endlich die Abnahme des spezifischen Gewichtes im Ballon beim Aufsteigen kleiner als die der Atmosphäre, so bewegt sich der Ballon nach Aufhören der störenden Ursache pendelnd um seine Anfangsstellung zurück und kommt dort nach einiger Zeit in den Ruhezustand. Die Aenderung des spezifischen Gewichtes im Ballon wird namentlich durch die Art der Zustandsänderung in demselben bedingt.

Ist voller Ausgleich vorhanden, so bleibt der Ballon dort, wohin er gebracht wurde, das Gleichgewicht der Atmosphäre muss also für eine Störung mit dieser Zustandsänderung stets indifferent sein.

Anders ist dies aber, wenn im Ballon blos Temperaturausgleich anzunehmen ist. Hier werden möglicherweise Verschiedenheiten der Dunstspannungen entstehen und wird hierdurch eine Verschiedenheit in den spezifischen Gewichten der Luft im Ballon und in der umgebenden Atmosphäre bedingt werden.

Eine solche wird im Allgemeinen bei adiabatischer Zustandsänderung im Ballon stets zu erwarten sein.

### A) Gleichgewichtszustand der Atmosphäre unter Annahme von Störungen mit Temperaturausgleich.

Die Untersuchung hat man derart anzustellen, dass die Differentialquotienten $d\gamma : dh$ sowohl für den Ballon als die Atmosphäre bestimmt werden.

Der Einfachheit halber soll für den Ballon

$$\frac{d\gamma}{dh} = \gamma_2'^{*}),$$

für die Atmosphäre

$$\frac{d\gamma}{dh} = \gamma_1'$$

gesetzt werden. Es wird alsdann das Gleichgewicht der Atmosphäre

stabil
indifferent
labil

sein, wenn absolut genommen $\gamma_1' \gtrless \gamma_2'$ ist.

Da es sich hier um sehr kleine Bewegungen handelt, ist die Konstanz des Grundzustandes des Ballons anzunehmen. Es gilt deshalb Gleichung (54)

$$\gamma = \frac{1}{R} \cdot \frac{b}{T},$$

woraus zunächst

$$d\gamma = \gamma \left\{ \frac{db}{b} - \frac{dt}{T} \right\}$$

folgt. Wird diese Gleichung durch $dh$ dividirt, so erhält man

$$\gamma'_2 = \frac{d\gamma}{dh} = \frac{\gamma}{b}\frac{db}{dh} - \frac{\gamma}{T}\frac{dt}{dh} \quad . \quad . \quad (56)$$

Die Differentialquotienten $\frac{dt}{dh}$ und $\frac{db}{dh}$ sind aus den Gleichungen (49) und (51) zu bestimmen, welche

$$\frac{dt}{dh} = -0{,}007 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

$$\frac{db}{dh} = -0{,}08474 + 0{,}000\,00731\,h - 0{,}000\,000\,000\,912\,h^2 \quad (58)$$

ergeben.

Zur Ableitung von $\gamma_1'$, der Aenderung des spezifischen Gewichtes für die Einheit der Höhe in der Atmosphäre, muss man von derselben Formel ausgehen, hat aber $K$ als variabel zu betrachten und schreibt sie am besten unter Berücksichtigung der Gleichungen (52) und (53) in der Form

$$\gamma T = mb - n\sigma,$$

wodurch man

$$\gamma_1' = \frac{d\gamma}{dh} = \frac{m}{T}\frac{db}{dh} - \frac{\gamma}{T}\frac{dt}{dh} - \frac{n}{T}\frac{d\sigma}{dh} \quad . \quad (59)$$

erhält und nach Gleichung (50)

$$\frac{d\sigma}{dh} = -0{,}00\,467 + 0{,}000\,000\,596\,h \quad . \quad (60)$$

findet.

### B) Gleichgewichtszustand der Atmosphäre unter Annahme von Störungen mit adiabatischer Zustandsänderung.

Wir müssen zur Ableitung von $\gamma_3'$ von derselben Zustandsgleichung ausgehen und kommen, da $R$ konstant ist, zu der Formel (56). Für $dt : dh$ gilt aber hierin nicht mehr Gleichung (57). Hierzu ist auf Gleichung (XXIII) zurückzugehen und sind die für die adiabatische Zustandsänderung im Trockenzustande geltenden Formeln

$$\frac{dt}{db} = \frac{1}{\mu}\frac{T}{b},$$

$$\mu = 3{,}440 + 0{,}6289\,e_0$$

zu nehmen. Da

$$\frac{dt}{dh} = \frac{dt}{db} \cdot \frac{db}{dh} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{T}{b} \cdot \frac{db}{dh} \quad . \quad . \quad (61)$$

ist, so findet man unter Berücksichtigung von (56)

$$\gamma_3' = \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{\gamma}{b}\frac{db}{dh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Resultat. Werden die im ersten Abschnitt gefundenen Zahlen in die Gleichungen dieses Abschnittes eingestellt, so kann man hierdurch ein Bild des Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre in den verschiedenen Höhen erhalten.

So findet man zunächst

| $h$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $db : dh$ (58) | — 0,085 | — 0,078 | — 0,070 | — 0,064 | — 0,057 | — 0,050 $mm$ |
| $d\sigma : dh$ (60) | — 0,0047 | — 0,0041 | — 0,0035 | — 0,0029 | — 0,0023 | — 0,0017 $mm$ |
| $dt : dh$ (57) | — 0,007 | — 0,007 | — 0,007 | — 0,007 | — 0,007 | — 0,007 ° C. |
| $dt : dh$ (61) | — 0,0098 | — 0,0097 | — 0,0097 | — 0,0097 | — 0,0095 | — 0,0092 ° C. |

Die drei Arten von Differentialquotienten für $\gamma$ ergeben sich aber in Einheiten der 6. Dezimale und unter Weglassung des Vorzeichens, das stets — ist:

| $h$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_1'$ | 100,5 | 94,4 | 87,8 | 81,1 | 74,3 | 67,3 |
| $\gamma_2'$ | 102,0 | 95,8 | 89,1 | 82,3 | 75,3 | 68,1 |
| $\gamma_3'$ | 91,5 | 85,7 | 79,9 | 74,0 | 68,0 | 61,9 |

Es muss hervorgehoben werden, dass diese Zahlen die Aenderungen des spezifischen Gewichtes für je einen Meter

*) Eine Verwechselung mit $\gamma'$, dem spezifischen Gewichte des Quecksilbers, ist hier wohl nicht möglich.

Höhendifferenz in Milligrammen bedeuten. Mithin ist 1 *m* über dem Erdboden das Gewicht von 1 *cbm* Luft um 100,5 *mg* kleiner als unmittelbar am Erdboden. Steigt der Ballon hier um 1 *m* unter Voraussetzung des Temperaturausgleiches an, so nimmt sein spezifisches Gewicht aber um 102,0 *mg* ab, es wird also das Gewicht der aufgestiegenen Luftmasse kleiner sein, als der Auftrieb, den sie erleidet, und wird somit eine nach oben wirkende, die Fortbewegung begünstigende Kraft übrig bleiben. Das Gleichgewicht der Atmosphäre wird also dann als labil zu betrachten sein. Es ist aber die Bedingung die, dass nur Temperaturausgleich stattfindet, und wird das labile Gleichgewicht nur dann vorhanden sein, wenn die aufsteigenden Luftmassen zwar die Temperatur der Umgebung rasch annehmen, aber im Grundzustande unverändert bleiben. Wie weit dies in der Natur möglich ist, das möge hier dahingestellt bleiben.

Ganz anders ist dies aber für Bewegungen mit adiabatischer Zustandsänderung. Da hier das spezifische Gewicht der so aufsteigenden Luftmasse sich nur um 91,5 *mg* pro Meter vermindert, tritt ein Ueberwiegen der Schwerkraftswirkung gegen den Auftrieb ein, die Bewegung kann also ohne äussere Einwirkung nicht fortbestehen, sondern es wird die Luftmasse, sich selbst überlassen, in ihr altes Niveau zurückkehren.

Somit erkennt man, dass unter den gemachten Annahmen das Gleichgewicht der Atmosphäre gegen alle heftigen raschen Störungen stabil ist. Nur für langsame Bewegungen mit Temperaturausgleich bei unvermindertem Feuchtigkeitsgehalt ist labiles Gleichgewicht vorhanden. Es wird also das Spiel langsamen Aufsteigens kleinerer warmer Luftmassen und das kompensirende Niedersinken kälterer Massen, wodurch nach und nach Wärme und Wasserdampf den Höhen zugeführt werden, eher begünstigt als unmöglich erscheinen.

### 3) Das Aufsteigen einer Luftmasse bei konstantem Grundzustand unter Einwirkung irgend einer äusseren Ursache.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes kann zwar eine aufsteigende Bewegung mit Temperaturausgleich, welche an irgend einer Stelle durch einmaligen Impuls eingeleitet wurde, fortbestehen, es muss aber jede mit adiabatischer Zustandsänderung verbundene Bewegung erst verzögert erscheinen und dann in die entgegengesetzte sich verwandeln.

Das Aufsteigen einer Luftmasse vom Erdboden bis zu beliebiger Höhe wird also nur durch irgend welche äussere Einwirkungen ermöglicht. Welcher Art solche sind, das zu erörtern erscheint hier nicht nöthig.

Wir stellen uns den Vorgang vor, dass 1 *kg* Luft vom Erdboden an in die Höhe gehoben wird.

Der Anfangszustand im Ballon ist: $b_1 = 760$ *mm*, $t_1 = 30^0$ C., $\sigma_1 = 19{,}0$ *mm*; der Grundzustand ist charakterisirt durch: $e_0 = 0{,}025$.

Wir erhalten die

Zustandsgleichungen:

Trockenzustand.

$$\varphi b = 2{,}1732\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

$$\sigma = 0{,}025\, b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Feuchtzustand.

$$\varphi (b - s) = 2{,}1189\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

$$s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Gewichtsgleichungen:

$$G_0 = 0{,}0157 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

$$G = 0{,}6132\, \frac{e}{1 - e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

$$G' = 0{,}6289\, \frac{0{,}025 - e}{1 - e} \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Gleichungen der adiabatischen Linien.

Trockenzustand: $\log b = 3{,}455 \log T + \text{Konst.}$ . (70)

Regenstadium: $\log (b - s) = 3{,}671 \log T + 3{,}920\, \frac{sr}{(b - s)\, T} + \text{Konst.}$ (71)

Hagelstadium: $\log (b - a) = -0{,}029\, \varepsilon + \frac{40{,}00 + 5{,}224\, \varepsilon}{b - a} + \text{Konst.}$ (72)

Schneestadium: $\log (b - s) = 3{,}556 \log T + 3{,}920\, \frac{s}{b - s} \cdot \frac{[r]}{T} + \text{Konst.}$ (73)

Um den Verlauf der adiabatischen Zustandsänderungen übersehen zu können, wurde zunächst die Grenzkurve für den Grundzustand $e_0 = 0{,}025$ festgestellt.

Die Koordinaten für dieselbe ergaben sich

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | 800 | 700 | 600 | 500 | 400 | 300 | 200 | 100 *mm* |
| $s_0$ | 20,0 | 17,5 | 15,0 | 12,5 | 10,0 | 7,5 | 5,0 | 2,5 *mm* |
| $t_0$ | 22,3 | 20,1 | 17,7 | 14,8 | 11,4 | 7,1 | 1,3 | — 8,0° C. |

Es wurde nunmehr von den Punkten der Grenzkurve: 800, 700, 600 u. s. w. Millimeter ausgegangen. Durch Einsetzen der diesen Punkten entsprechenden Werthe von $b_0$, $s_0$ und $t_0$ in die Gleichungen (70) und (71) konnten die Konstanten der Gleichungen der Adiabate für den Trockenzustand und das Regenstadium ermittelt und dann für angenommene Werthe von $t$ (von $2^1/_2$ zu $2^1/_2$ Grad fortschreitend) die zugehörigen $b$ berechnet werden.

Schritt man so im Regenstadium bis 0° C. vor, so erhielt man die Werthe von $b$, die zur Feststellung der Konstanten in Formel (72) beim Eintritt des Hagelstadiums dienen. Die Barometerstände für das Ende des Hagelstadiums wurden alsdann zur Bestimmung der Konstanten in Formel (73) verwendet und konnte so die Zustandsänderung im Schneestadium bis — 30° berechnet werden.

Es dürfte zweckmässig sein, die Hauptergebnisse dieser Rechnung in Zahlen hier einzustellen.

**Koordinaten der Adiabaten des Grundzustandes 0,025.**

| $b_0$: | 800 | 700 | 600 | 500 | 400 | 300 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_0$: | 22,3 | 20,1 | 17,7 | 14,8 | 11,4 | 7,1 | 1,3 |
| $t = +30^0$ | · | 785,1 | 692,3 | 597,3 | 497,9 | 393,6 | 282,1 |
| $+20$ | 752,0 | · | 616,6 | 531,9 | 443,4 | 350,5 | 251,2 |
| $+10$ | 578,6 | 533,2 | 485,0 | 435,7 | 383,6 | 310,9 | 222,8 |
| 0 | 455,9 | 416,9 | 375,7 | 333,8 | 289,8 | 243,0 | 192,5 |
| 0 | 441,4 | 404,7 | 365,9 | 326,3 | 284,7 | 240,3 | 192,2 |
| $-10$ | 351,0 | 319,4 | 286,1 | 252,2 | 216,7 | 179,2 | 139,1 |
| $-20$ | 285,8 | 258,5 | 229,7 | 200,5 | 170,0 | 138,0 | 104,0 |
| $-30$ | 237,6 | 213,9 | 189,1 | 163,9 | 137,6 | 110,0 | 80,9 |

Ueber den Strichen ist Trockenzustand, darunter Feuchtzustand vorhanden.

Fig. 1 stellt den Verlauf der Adiabaten etwas ausführlicher dar.

Die unterste Adiabate beginnt im Regenstadium von 800 *mm* an mit 22,3° C. Temperatur. Die Temperatur 0°

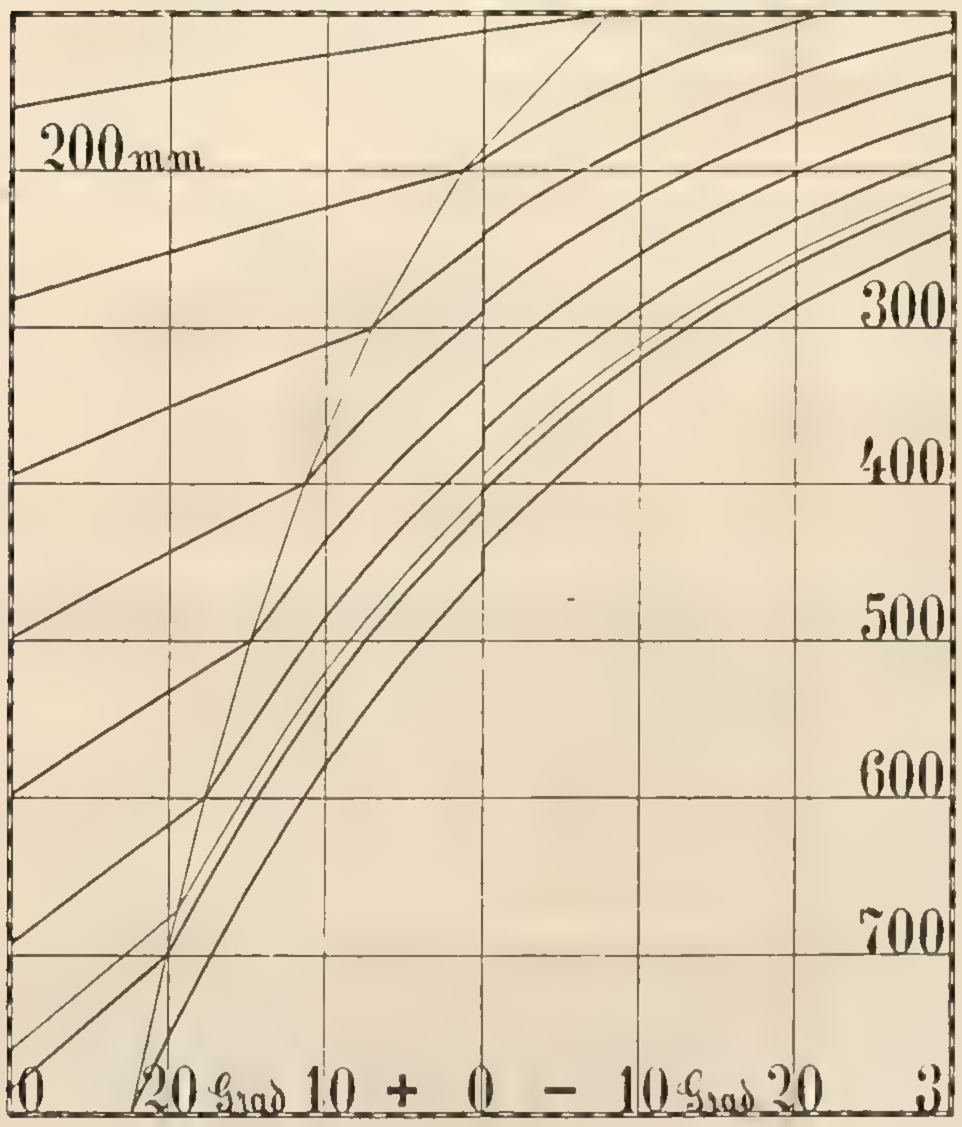



Fig. 1.

wird bei 455,9 *mm* Druck erreicht. Das Hagelstadium findet während der Aenderung des Druckes von 455,9 bis 441,4 *mm* statt. Während dieser Druckabnahme hält sich die Temperatur konstant auf 0° C. Alsdann beginnt mit dem Druck die Temperatur wieder zu sinken, und so wird — 30° C. bei dem Barometerstand 237,6 *mm* erreicht. Aehnlich ist der Verlauf der anderen Adiabaten, nur kommen bei denselben links der Grenzkurve die Zustandsänderungen des Trockenzustandes zur Darstellung.

Im vorliegenden Falle beginnt die adiabatische Zustandsänderung von 760 *mm* Druck und 30° C. Temperatur im Trockenzustande an. Da die Fig. 1 einen genügend parallelen Verlauf der Adiabaten erkennen lässt, wurde die Kurve für unser Beispiel einfach interpolirt und findet sich in Fig. 1 als schwächere Linie eingetragen.

Mit Hülfe der Originalzeichnung wurde alsdann diese Adiabate als Funktion der Höhe dargestellt, indem man mit den den gegebenen Höhen entsprechenden Barometerständen die zugehörigen Temperaturen aufsuchte.

Nach diesen Vorbereitungen war es möglich, die Zustandsänderungen des Ballons bei seinem Aufstieg in der Atmosphäre zu verfolgen.

Es wird sich empfehlen, stets die zwei Fälle, die Zustandsänderung mit Temperaturausgleich und die adiabatische, einander gegenüber zu stellen.

Wie bereits erwähnt wurde, wird der thatsächliche Vorgang in der Mitte zwischen beiden Grenzen anzunehmen sein.

### a) Die Temperaturen.

Bei der Bewegung mit Temperaturausgleich wird der Ballon stets die Temperatur der Atmosphäre annehmen. Die Temperaturkurve für den adiabatischen Vorgang dagegen ergiebt sich, wie bereits erwähnt, aus der Adiabate (Fig. 1), und so erhält man

| | 0 | 1000 | 1100 | 1650 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausgleich | 30,0 | 23,0 | — | 18,4 | 16,0 | 9,0 | 2,2 | — 5,0 |
| Adiabate | 30,0 | 20,3 | 19,4 | — | 15,6 | 11,2 | 6,7 | 1,8 |

Bei 1100 *m* erreicht der Ballon den Grenzzustand, wenn die Zustandsänderung adiabatisch erfolgt. Bei Temperaturausgleich tritt dies aber erst in 1650 *m* Höhe ein.

Wie Fig. 2 erkennen lässt, ist der Vorgang sehr interessant. Solange Trockenzustand herrscht, kühlt sich der Ballon adiabatisch stark unter die Temperatur der Atmosphäre ab. Mit Beginn des Regenstadiums aber wird die Adiabate *b* schräger als die Ausgleichskurve *a*. Bei 2150 *m* hat die Adiabate die Ausgleichskurve wieder erreicht und darüber hinaus liegt sie höher, der Ballon wird also in adiabatischer Zustandsänderung wärmer werden, als die Atmosphäre.

### b) Die Dunstspannungen.

So lange Trockenzustand herrscht, ist die Dunstspannung eine Funktion des Druckes; es lässt sich also dieselbe direkt als Funktion der Höhe darstellen.

Vom Eintritt des Feuchtzustandes an wird aber die Dunstspannung lediglich eine Funktion der Temperatur.

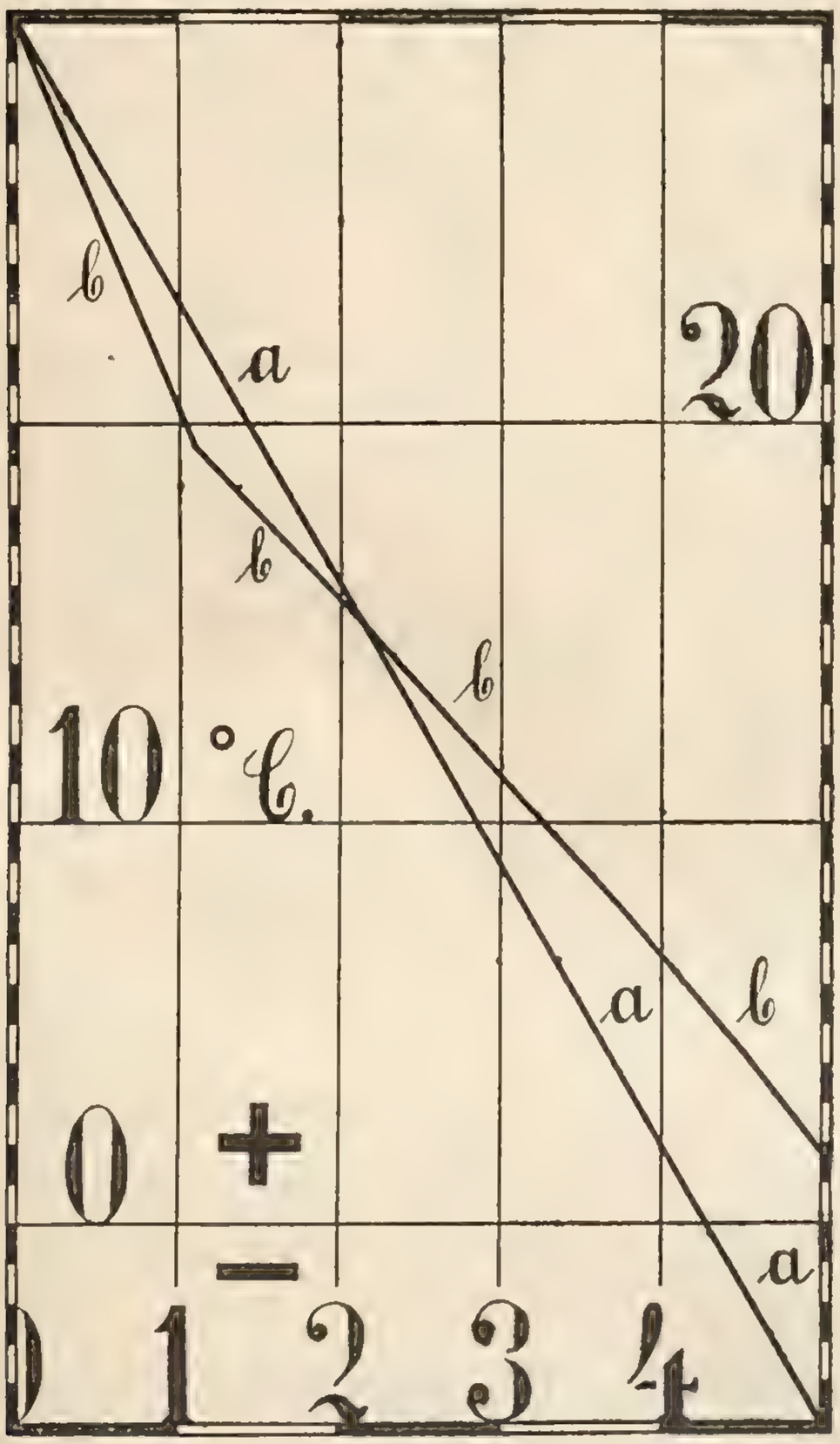



Fig. 2.

Die Zustandsgleichungen in Verbindung mit den Ergebnissen unter a) liefern folgende Zahlen:

| Höhe | | 0 | 1000 | 1100 | 1650 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausgleich | $\sigma$ | 19,0 | 17,0 | — | 15,7 | — | — | — | — |
| | $s$ | — | — | — | 15,7 | 13,5 | 8,6 | 5,3 | 3,2 |
| Adiabatisch | $\sigma$ | 19,0 | 17,0 | 16,8 | — | — | — | — | — |
| | $s$ | — | — | 16,8 | — | 13,2 | 9,9 | 7,3 | 5,2 |
| Maximalkurve der Atmosphäre | | 31,5 | 20,9 | — | 15,7 | 13,5 | 8,6 | 5,3 | 3,2 |

Auch diese Zustandsänderungen werden besser durch graphische Darstellung übersichtlich.

Fig. 3 lässt in der Kurve $a$ zunächst die Abnahme der Dunstspannung in der Atmosphäre nach der Formel (50) übersehen. Die Kurve $b$ stellt die Maximalwerthe dar, welche zu den Temperaturen in den verschiedenen Höhen der Atmosphären gehören und deren Koordinaten in der untersten Reihe vorstehender Zahlengruppe sich vorfinden.

Im Ballon ändert sich die Dunstspannung, so lange auf der nach der Formel $\sigma = 0{,}025\, b$ berechneten Linie $c$




Fig. 3.

als Trockenzustand herrscht. Wo die Linie $c$ mit der Maximalkurve $b$ zusammentrifft, erreicht der Ballon den Grenzzustand für Temperaturausgleich und findet bei dieser Zustandsänderung von der betreffenden Höhe an Abnahme der Dunstspannung im Ballon längs der Maximalkurve $b$ statt. Die Originalzeichnungen ergeben den Schnitt der Kurven $b$ und $c$ bei $h = 1650$ $m$.

Die Dunstspannung verfolgt die Kurve $c$ anfangs auch dann, wenn die Zustandsänderung adiabatisch ist. Der Grenzzustand tritt aber hier schon bei 1100 $m$ Höhe ein. Hier zweigt sich die Linie $d$ ab, welche den weiteren Verlauf der Dunstspannung im Ballon bei der adiabatischen Zustandsänderung angiebt.

Die Kurven $b$ und $d$ müssen sich, wie die Temperaturkurven, bei 2150 $m$ schneiden, und wird über dieser Höhe der Ballon eine grössere Dunstspannung haben, wenn die Zustandsänderung adiabatisch ist, als wenn sie mit Temperaturausgleich erfolgt.

### c) Die spezifischen Gewichte.

Die Formel (54), nach welcher die Abnahme des spezifischen Gewichtes $\gamma_1$ in der Atmosphäre mit der Höhe berechnet wurde, kann ohne Weiteres auch für Ermittelung der Dichtigkeitsänderung im Ballon verwendet werden. Nur wird für den Trockenzustand ausserdem nach Formel (63) und für den Feuchtzustand Formel (65) in Rücksicht zu ziehen und entsprechend umzuformen sein.

Man kann alsdann durch Einsetzen der $b$ und $t$, resp. $s$, welche für die Höhen $h$ in den vorhergehenden Darstellungen abgeleitet wurden, sowohl die spezifischen Gewichte $\gamma_2$ für die Bewegung mit Temperaturausgleich, als auch $\gamma_3$ für die adiabatische Zustandsänderung berechnen.

Die Werthe für $\gamma_1$ wurden schon im Abschnitt 1 des II. Theiles gegeben. Hier haben wir weniger Interesse an den $\gamma_2$ und $\gamma_3$ als an den Differenzen desselben mit $\gamma_1$, da ja durch diese Grössen der Bewegungszustand des Ballons bestimmt wird.

| $h$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_1 - \gamma_2$ | 0,0000 | + 0,0014 | — 0,0002 | — 0,0045 | — 0,0071 | — 0,0082 |
| $\gamma_1 - \gamma_3$ | 0,0000 | — 0,0083 | — 0,0020 | + 0,0045 | + 0,0100 | + 0,0136 |

Auf die Aussagen dieser Zahlen werden wir noch zurückkommen.

### d) Die Wasserausscheidung.

Gleichung (67) giebt an, dass der Ballon am Ausgangsort 15,7 $g$ Wassergas enthält. Diese Menge bleibt bis zum Eintritt des Grenzzustandes unverändert.

Von da an nimmt $e$ ab und gestatten die Gleichungen (68) und (69), mit dem jeweiligen aus $s$ und $b$ folgenden Werthe von $e$ sowohl das Gewicht $G$ des Wasserdampfes, als auch das Gewicht $G'$ des in fester oder flüssiger Form ausgeschiedenen Theiles der Grundzustandsmenge $G_0$ zu berechnen.

| | 1100 | 1250 | 1500 | 1650 | 1750 | 2000 | 2250 | 2500 | 2750 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausgleich $G'$ | — | — | — | 0,0 | 0,6 | 1,7 | 3,2 | 3,9 | 4,9 | 5,8 | 8,8 | 11,1 $g$ |
| Adiabatisch $G'$ | 0,0 | 0,8 | 1,0 | — | 1,5 | 2,1 | 2,6 | 3,2 | 3,8 | 4,2 | 6,2 | 8,1 $g$ |
| Ausscheidung für je 100 $m$ Aufstieg. | | | | | | | | | | | | |
| Ausgleich . . . . | — | — | — | 0,60 | 0,44 | 0,60 | 0,28 | 0,40 | 0,36 | 0,30 | 0,23 $g$ | |
| Adiabatisch . . . | 0,53 | 0,14 | — | 0,33 | 0,40 | 0,33 | 0,40 | 0,40 | 0,27 | 0,10 | 0,09 $g$ | |

Erfolgt das Aufsteigen mit Temperaturausgleich, so beginnt die Wasserausscheidung bei 1650 $m$ Höhe. Bei 5000 $m$ sind von den 15,7 $g$, welche dem Grundzustand entsprechen, 11,1 $g$ ausgeschieden und befinden sich entweder als Schneekrystalle im Ballon gleichmässig vertheilt, oder sind herausgefallen

Die adiabatische Zustandsänderung lässt die Wasserausscheidung schon in 1100 $m$ Höhe beginnen; es sind aber bei 5000 $m$ Höhe 3 $g$ Wasser weniger kondensirt als bei Temperaturausgleich, und finden wir auch hier nicht Eiskrystalle, sondern Wassertropfen vor. Charakteristisch ist in beiden Fällen, dass die Kondensation kräftig einsetzt. Berechnet man, wie dies oben geschehen ist, die Ausscheidung für je 100 $m$ Aufstieg, so wird man hierfür 0,5 $g$ bei Temperaturausgleich und etwa 0,3 bis 0,4 $g$ bei adiabatischer Zustandsänderung annehmen können. In beiden Fällen bleibt dieser Quotient bis zu Höhen zwischen 2000 und 3000 $m$ nahezu konstant und nimmt dann mit darüber hinaus wachsender Höhe rasch ab.

Das Schwanken dieser letzten Zahlen würde bei etwas grösserer Genauigkeit der Rechnung verschwinden.

### e) Die bewegende Kraft.

Wenn $\gamma_1$ das spezifische Gewicht der Atmosphäre und $\gamma_2$ dasjenige der Luft im Ballon in der Höhe $h$ ist, so wird das Volumen des genau 1 $kg$ schweren Ballons $\varphi = 1 : \gamma_2$ sein. Der Auftrieb, den der Ballon in der umgebenden Atmosphäre erleidet, ist dann $\varphi\gamma_1$.

Wird mit $P$ die Differenz zwischen dem Auftrieb und dem Gewicht bezeichnet, so wird dieses $P$ als bewegende Kraft aufgefasst werden können und positiv erscheinen, wenn die Kraft nach oben gerichtet ist.

Man erhält

$$P = \varphi\gamma_1 - 1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} \quad . \quad (74)$$

Formel (74) liefert in Verbindung mit den Werthen des Abschnittes $c$:

| Höhe | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperaturausgleich | 0,0 | + 1,3 | — 0.2 | — 5,1 | — 8,8 | — 11,1 $g$ |
| Adiabatische Zustandsänderung | 0,0 | — 7,8 | — 2,0 | + 5,1 | + 12,6 | + 18,9 $g$ |

Dieses Resultat ist höchst interessant. Langsame, mit Temperaturausgleich verbundene Bewegungen werden bis zu Höhen von zirka 2000 $m$ durch nach oben gerichtete bewegende Kräfte begünstigt werden. Darüber hinaus widerstrebt aber die Atmosphäre solchen Bewegungen. Findet aber die Bewegung adiabatisch statt, so kann der Ballon bis zu Höhen von ebenfalls zirka 2000 $m$ allein nicht steigen, er muss irgendwie gehoben werden. Ist er aber darüber hinaus, so wird $P$ positiv und es scheint, dass, je grössere Höhen er erreicht, die nun nach oben wirkende bewegende Kraft um so grösser wird.

Hierbei muss man beachten, dass der Ballon das ausgeschiedene Wasser noch mit sich führt. Wollte man annehmen, dass dieses bei irgend einer Höhe $h$ ausfällt, so wird eine an dieser Stelle eventuell nach oben gerichtete Kraft um dieses Gewicht vermehrt werden, ein negatives $P$

wird aber vermindert erscheinen und kann auch ein Wechsel des Vorzeichens, also der Kraftrichtung eintreten.

Wie sich diese Verhältnisse gestalten, lässt sich aus den Zahlen ersehen, die bei Bildung der Differenzen zwischen den bewegenden Kräften $P$ und den ausgeschiedenen Wassermengen entstehen.

| | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperaturausgleich . . . . | 0,0 | + 1,3 | + 1,5 | + 0,7 | 0,0 | 0,0 $g$ |
| Adiabatische Zustandsänderung | 0,0 | — 7,8 | — 0,1 | + 9,3 | + 18,8 | + 27,0 $g$ |

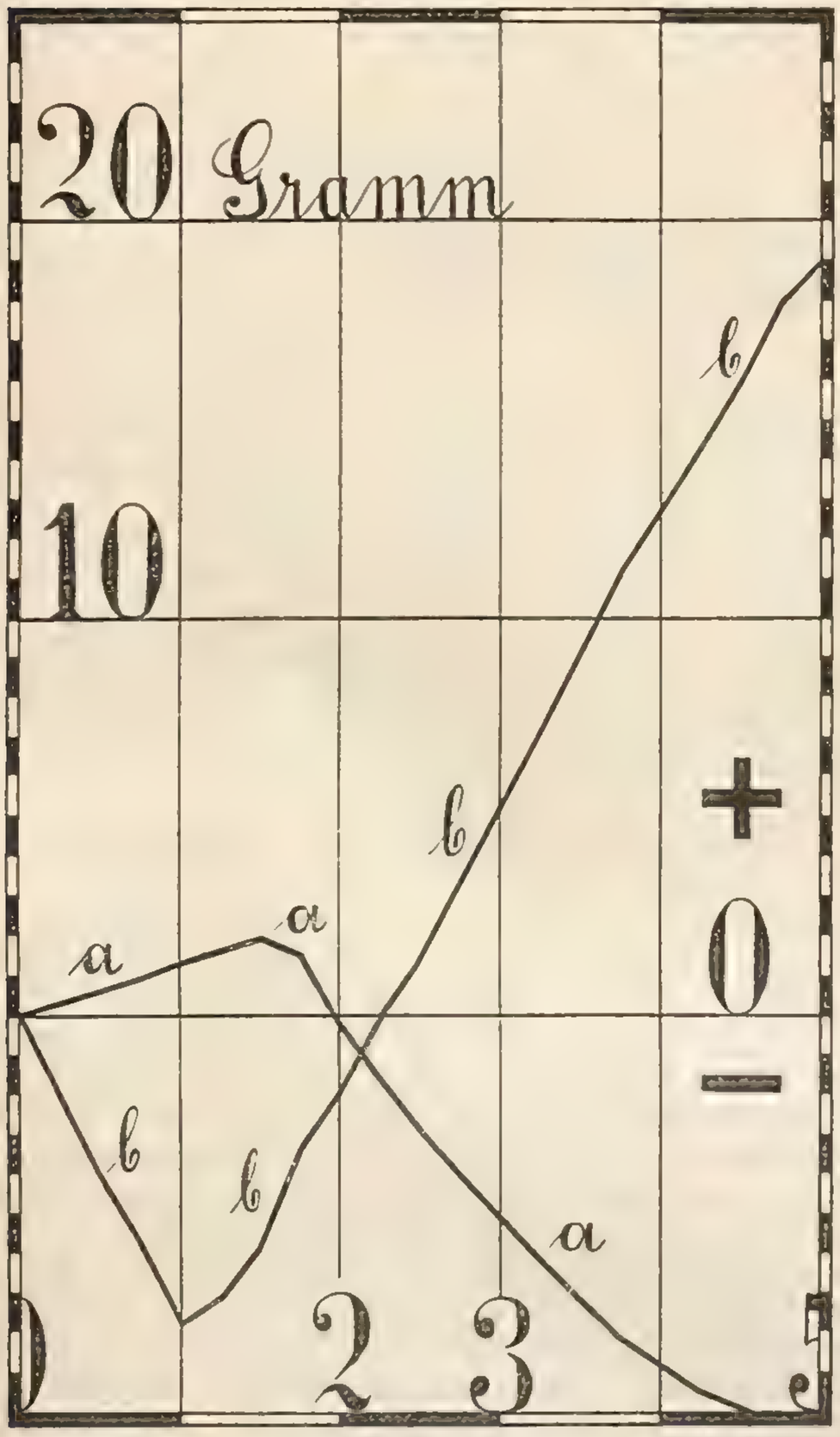



Fig. 4.

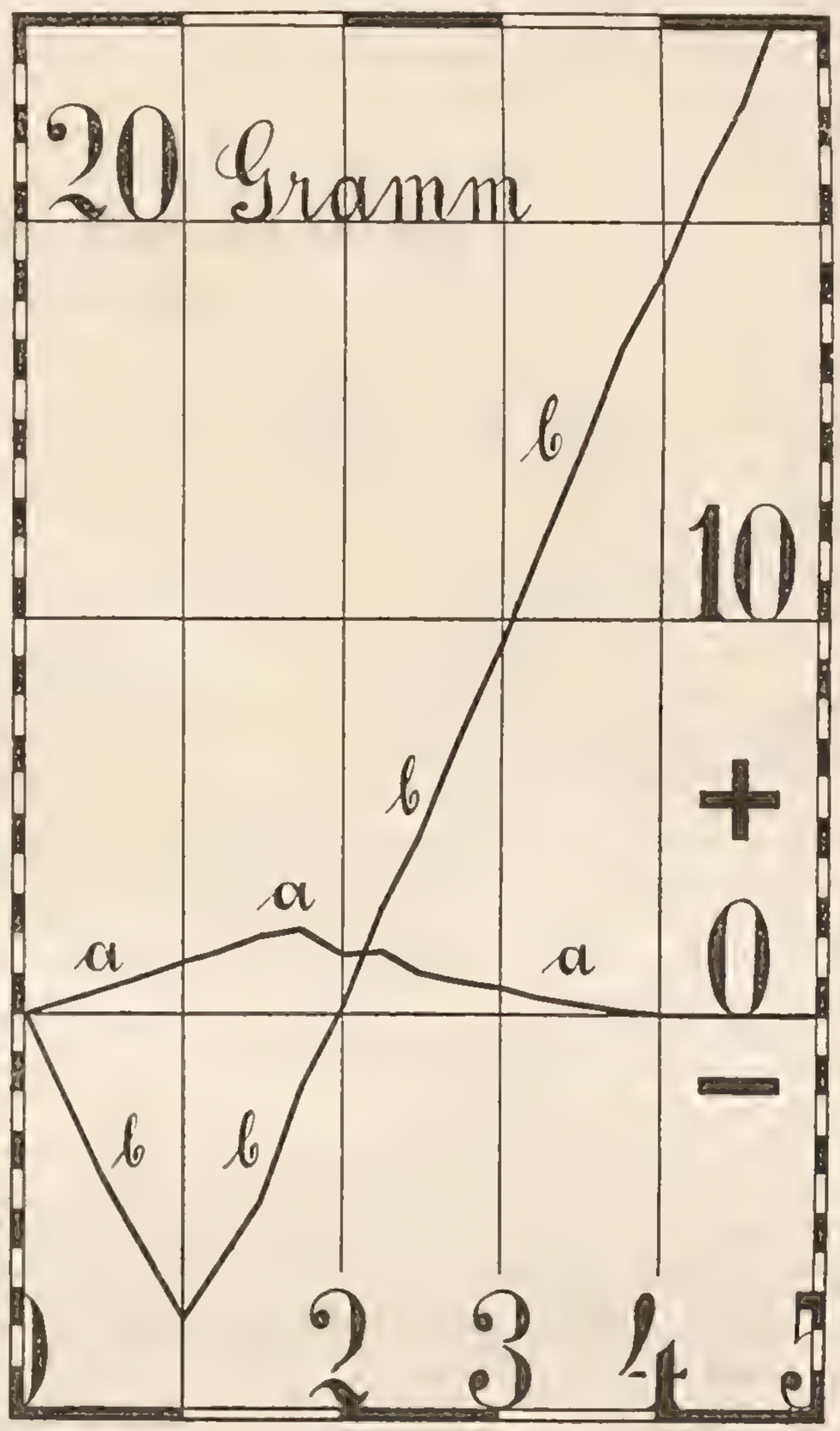



Fig. 5.

Wenn also der Ballon zur Höhe von 5000 $m$ gelangt ist, so wird er mit 11,1 $g$ nach unten gezogen, so lange Eiskrystalle in ihm schweben. Fallen dieselben plötzlich heraus, so ist der Ballon im Gleichgewicht, die bewegende Kraft wird Null. Dies gilt für die Bewegung mit Temperaturausgleich.

Fand aber beim Aufstieg adiabatische Zustandsänderung statt, so ist die bewegende Kraft + 18,9 $g$ bei unverändertem Grundzustand. Fällt jetzt das Wasser heraus, so vermehrt sich die bewegende Kraft auf + 27,0 $g$. Für die Weiterführung der Rechnung hat man aber dann zu beachten, dass das Herausfallen des Wassers eine Aenderung des Grundzustandes bedingt und man mit dem neuen, durch $e_0 = 5{,}2 : 423{,}9 = 0{,}0133$ charakterisirten Grundzustande rechnen müsste.

Fig. 4 und 5 lassen die Gestaltung der bewegenden Kraft in den verschiedenen Höhen gut übersehen. Fig. 4 gilt für konstanten Grundzustand, während in den Kurven von Fig. 5 die Kondensationsprodukte ausgeschieden gedacht wurden. Die Kurve $a$ gilt in beiden Figuren für die Bewegung mit Temperaturausgleich, während $b$ adiabatische Zustandsänderung voraussetzt.

Als sicher kann man schliessen, dass bei dem vorausgesetzten Zustande der Atmosphäre aufsteigende Bewegungen bis zu Höhen von 2000 $m$ nur schwer entstehen können.

Sowie aber eine solche irgendwie eingeleitete Bewegung über 2000 $m$ hinausgekommen ist, dann werden die Bedingungen zu ihrer Fortdauer um so mehr gegeben sein, je mehr ein Herausfallen der Kondensationsprodukte aus der bewegten Masse stattfindet.

# Die Zustandsgleichungen einer Luftsäule.

## (Barometrische Höhenformeln.)

Aus der vorstehenden Arbeit über die Grundgleichungen für Zustand und Zustandsänderung in der Atmosphäre geht hervor, welche Bedeutung die kurz als „barometrische Höhenformel“ bezeichnete Zustandsgleichung für eine Luftsäule bei Untersuchungen über die Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre hat.

Man hat diesen Formeln so komplizirte Gestalten gegeben, dass ihre Verwendung bei Zahlenrechnungen nur mit Hülfe von Tabellen oder graphischen Darstellungen einigermaassen möglich wird.

Da die den Formeln zu Grunde liegenden Annahmen aber so unsicher sind, erscheint es denkbar, dass man mit wesentlich einfacheren Gestaltungen derselben selbst in den Fällen wird auskommen können, wo man die gewöhnlichen Laplace'schen vereinfachenden Annahmen bei der Integration fallen lässt.

Die vorliegende Arbeit wurde in der Absicht unternommen, die einfachsten Formen der Zustandsgleichung und deren Ableitung zu suchen.

Sie bilden einen Theil des Werkzeuges für die Arbeiten in der Mechanik der Atmosphäre, und alle diese komplizirten und schwierigen Aufgaben werden nur dann rüstig vorwärts schreiten, wenn man der Gestaltung dieses Werkzeuges möglichste Aufmerksamkeit schenkt und alle überflüssige Genauigkeit als hemmenden Ballast über Bord wirft.

### I. Die Reduktion der Barometerstände.

Die Grundgleichungen für die Zustände gasförmiger Körper

$$\frac{v_1 p_1}{v_2 p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ oder } \frac{v_1 b_1}{v_2 b_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

setzen voraus, dass die Spannungen für Anfangs- und Endzustand in gleichen Einheiten ausgedrückt werden, wobei es gleichgültig ist, wie man diese Einheiten wählt.

Drückt man die Spannungen durch Höhen von Quecksilbersäulen aus, so ist gewöhnlich nur erforderlich, dass diese Säulen gleiche Temperatur haben. Da es aber selten möglich ist, bei der Ausführung der Messungen die Temperaturen der Mano- und Barometer auf bestimmte Grade zu bringen und dabei zu erhalten, so lassen sich Reduktionsrechnungen nie umgehen, und ist es daher üblich geworden, alle Messungen auf die Temperatur des Eispunktes zu reduziren, wobei die Dichte des chemisch reinen Quecksilbers zu 13,596 angenommen werden kann.

Setzt man voraus, dass die Messung der Höhe der Quecksilbersäule mittelst eines Maassstabes aus Messing geschieht, der bei $0^0$ C. seine wahre Länge besitzt, so hat man die Reduktion des gemessenen Baro(Mano-)meterstandes $b_t$ auf $0^0$ C. nach der Formel

$$b_0 = b_t \left\{ 1 - \frac{0{,}000\,1634\, t}{1 + 0{,}000\,1818\, t} \right\} \text{ Millimeter} \quad . \quad (2)$$

auszuführen. $t$ wird hier die Temperatur des Maassstabes und der Quecksilbersäule in Centesimalgraden sein, und $b_0$ heisst der auf $0^0$ reduzirte Barometerstand.

Nimmt man nun aber an, dass eine in ein Gefäss eingeschlossene Luftmasse an Orte mit verschiedener Grösse der Schwerkraft gebracht werde, so ist klar, dass die Spannung dieser Masse nur von der Temperatur und dem Volumen abhängen wird und dass die Grösse der Schwerkraft nur einen zu vernachlässigenden Einfluss auf den Druck ausüben kann, den die Gasmasse auf den Boden des Gefässes ausübt, keinen aber auf die Spannung. Dagegen wird die Schwere auf die Angabe des Quecksilberbarometers wirken; es wird dasselbe bei gleicher Spannung der eingeschlossenen Luftmasse um so tiefer stehen, je grösser die Schwere ist. Oder auch: Zeigen die auf $0^0$ reduzirten Stände des mit dem Gefässe verbundenen Barometers gleichen Druck an, so wird die Spannung des Gases am Orte der grösseren Schwere grösser sein als am Orte der kleineren Schwere.

Es wird also hier eine Reduktion der Quecksilbersäulen auf gleiche Schwere eintreten müssen.

Man ist übereingekommen, in allen solchen Fällen, wo die Verschiedenheiten der Schwerkraft in Rücksicht zu ziehen sind, die Reduktion auf die im Meeresspiegel unter $45^0$ Breite stattfindende Normalschwere, deren Beschleunigung $g_0 = 9{,}8055\, m$ ist, vorzunehmen.

Wenn an einem Orte mit der Breite $\psi$ und der Seehöhe $z$ die Beschleunigung der Schwerkraft $g$ ist, so hat man hierfür die Formel

$$g = g_0 (1 - 0{,}00259 \cos 2\psi)(1 - 0{,}000\,000\,196\, z) \quad (3)$$

Wenn nun $b_0$ der auf $0^0$ reduzirte Barometerstand ist und mit $b$ der auf $0^0$ und die Normalschwere reduzirte bezeichnet wird, so gilt

$$b : b_0 = g : g_0$$

und dies liefert

$$b = b_0 (1 - 0{,}00\,259 \cos 2\psi)(1 - 0{,}000\,000\,196\, z) \quad (4)$$

## II. Das spezifische Gewicht der Luft.

Wir wollen den Druck, den ein Körper von der Masse $1\,kg$ bei der Normalschwere $g_0$ auf seine Unterlage ausübt — das Gewicht —, mit 1 Druck-Kilogr. bezeichnen, während $1\,kg$ Masse 1 Massen-Kilogr. oder einfach Kilogramm genannt werden soll.

Bringt man einen Körper unter die Schwere $g$, so wird die Masse unverändert bleiben, aber es ändert sich das Gewicht proportional der Schwere. Wenn also irgend ein Körper unter der Normalschwere das Gewicht $\gamma_0\,kg$ hat, so ist seine Masse überall $\gamma_0$ Massen-Kilogr., das Gewicht unter der Schwere $g$ ist aber

$$\gamma = \gamma_0 \frac{g}{g_0} \text{ Druck-Kilogr.} \quad (5)$$

Würde z. B. $g = 2\,g_0$ sein, so würde der Körper, vermittelst einer Hebelwaage und Gewichten gewogen, die Masse $\gamma_0$ ergeben. Legte man ihn aber auf eine unter der Normalschwere graduirte Federwaage, so würde er das Gewicht $2\,\gamma_0$ zeigen.

Kann man Formel (3) auf das Verhältniss $g : g_0$ anwenden, so wird

$$\gamma = \gamma_0 (1 - 0{,}00\,259 \cos 2\psi)(1 - 0{,}000\,000\,196\, z) \quad (6)$$

Sei $\gamma_0$ das Gewicht von $1\,cbm$ atmosphärischer Luft von $0^0$ und $760\,mm$ Spannung unter Normalschwere, so wird

$$\gamma_0 = 1{,}2931\,kg \text{ (Masse und Druck)}$$

angenommen werden können.

Unter der Breite $\psi$ und in der Seehöhe $z$ wird das spezifische Gewicht der atmosphärischen Luft bei $0^0$ C. und $760\,mm$ einen anderen Werth $\gamma_0'$ haben, selbst dann, wenn diese $760\,mm$ als auf $0^0$ C. und die Normalschwere reduzirt angenommen werden.

Die Masse ist dann unverändert $\gamma_0$ Massen-Kilogr., das spezifische Gewicht wird aber nach Formel (6)

$$\gamma_0' = \gamma_0 (1 - 0{,}00\,259 \cos 2\psi)(1 - 0{,}000\,000\,196\, z) \text{ Druck-Kilogr.} \quad (7)$$

Wir wollen hier folgende Bezeichnungen einführen:

$$\varepsilon = 0{,}00\,259,\ \eta = 0{,}000\,000\,098 \quad (8)$$
$$(1 - \varepsilon \cos 2\psi)(1 - 2\eta z) = f(\psi, z),$$
$$\gamma_0' = \gamma_0 (1 - \varepsilon \cos 2\psi)(1 - 2\eta z) = \gamma_0 f(\psi, z).$$

Wenn wir nun annehmen können, dass die Luft in einer Säule sich im Trockenzustande befindet und höchstens dem Grenzzustande mehr oder weniger nahe kommen kann, so können wir direkt die Formeln unter III des I. Theiles der vorstehenden Abhandlung verwenden.

Bezeichnet alsdann $b$ die auf $0^0$ und Normalschwere reduzirte Spannung einer Luftmasse, $T$ deren absolute Temperatur und $\sigma$ die Dunstspannung, so ist das spezifische Gewicht $\gamma$ gegeben durch die Gleichung

$$\gamma = m \frac{b - 0{,}377\,\sigma}{T} \quad (9)$$

Die Grösse $m$ ist weiter nach der Formel

$$m = \gamma_0' \frac{273}{760}$$

bestimmt, woraus sich nach Formel (8)

$$m = \gamma_0 \frac{273}{760} f(\psi, z) \quad (10)$$

ergiebt.

Da $\gamma_0 = 1{,}2931\,kg$ anzunehmen ist, findet man weiter

$$m_0 = 1{,}2931 \times \frac{273}{760} = 0{,}46\,449 \quad (11)$$

und somit

$$\gamma = m_0 \frac{b - \mu\sigma}{T} f(\psi, h) \text{ Druck-Kilogramme pro Kubikmeter} \quad (I)$$

wenn noch

$$0{,}377 = 1 - 0{,}623 = \mu \quad (12)$$

gesetzt wird.

## III. Die Differentialgleichung.

Wenn in der Höhe $z$ über dem Meeresspiegel die absolute Temperatur $T^0$ C., die Dunstspannung $\sigma\,mm$ und der auf $0^0$ und Normalschwere reduzirte Barometerstand $b\,mm$ herrscht, dann wird die Spannung der Luft, ausgedrückt in Druck-Kilogrammen pro Quadratmeter, sein

$$p = 13{,}596\,b \quad (13)$$

Die bekannte Laplace'sche Form der Differentialgleichung ist dann

$$dp + \gamma\, dz = 0 \quad (14)$$

woraus unter Berücksichtigung von (13)

$$\frac{db}{dz} + \frac{\gamma}{13{,}596} = 0 \quad (15)$$

folgt. Nach Gleichung (I) erhält man aber

$$\frac{\gamma}{13{,}596} = \frac{m_0}{13{,}596} \cdot \frac{b - \mu\sigma}{T} f(\psi, h) \quad (16)$$

Wir wollen weiter die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{13{,}596}{m_0} = 29{,}271 \\ P &= \frac{P_0}{f(\psi, h)} = P_0 (1 + \varepsilon \cos 2\psi)(1 + 2\eta z \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

einführen und erhalten somit die Differentialgleichung in der Form

$$P \frac{db}{dz} + \frac{b}{T} - \mu \frac{\sigma}{T} = 0 \quad (II)$$

## IV. Die Integration.

Die Aufgabe besteht darin, die Beziehung zwischen der Höhe $h$ einer vertikalen Luftsäule, deren Fuss in der Höhe $z_1$ und deren Gipfel in der Höhe $z_2 = z_1 + h$ sich über dem Meeresspiegel befinden, einerseits und den die Druck-, Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse bestimmenden Grössen andererseits festzustellen. Diese Grössen sollen am Fusse der Säule $b_1$, $t_1$ resp. $T_1$ und $\sigma_1$, am oberen Ende aber $b_2$, $t_2$ resp. $T_2$ und $\sigma_2$ sein. Die Barometerstände sind auf $0^0$ und Normalschwere reduzirt. Da die Säule vertikal angenommen wird, ist zweifellos

$$\psi = \text{Konst.}$$

Für $z$ wird man in der Gleichung (17) einen mittleren Werth einsetzen können, was in allen Fällen mehr als genügend genau sein wird. Dieser mittlere Werth ist

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{2z_1 + h}{2}$$

und somit wird man in allen Fällen bei der Integration

$$P = P_0(+\varepsilon \cos 2\psi)(1 + \eta(2z_1 + h)) = \text{Konst.} \quad \text{(III)}$$

annehmen können.

Ganz anders verhält sich die Sache in Bezug auf $T$ und $\sigma$, bezüglich deren Behandlung wir hier drei Fälle unterscheiden wollen.

A) $T$ und $\sigma$ werden als konstant angenommen.

Die Gleichung (II) schreibt man hierzu in der Form

$$P \cdot T \frac{db}{b - \mu\sigma} + dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und erhält

$$PTl \cdot n \cdot (b - \mu\sigma) + z = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Das Einsetzen der Grenzwerthe giebt alsdann

$$h = PTl \cdot n \cdot \frac{b_1 - \mu\sigma}{b_2 - \mu\sigma} = \frac{PT}{M} \log \frac{b_1 - \mu\sigma}{b_2 - \mu\sigma} \quad . \quad (20)$$

worin $M$ das Modul der gemeinen Logarithmen ist.

B) $T$ und $\sigma$ sind Funktionen von $z$.

Wir gehen von der Form der Differentialgleichung

$$\frac{db}{dz} + \frac{1}{P \cdot T} b - \frac{\mu\sigma}{P \cdot T} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

aus und setzen

$$\frac{1}{P \cdot T} = Z, \qquad \frac{\mu\sigma}{P \cdot T} = -Z_0 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

so dass $Z$ und $Z_0$ als Funktionen von $z$ zu betrachten sind. Dies liefert

$$\frac{db}{dz} + Zb + Z_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und führt die Substitution $b = uv$ zu der Lösung

$$\left.\begin{aligned} b &= e^{-\zeta}\left\{\text{Konst.} - \int Z_0 e^{\zeta} dz\right\} \\ \zeta &= \int Z dz \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (24)$$

C) $T$ und $\sigma$ sind Funktionen von $b$.

Wird hier in der Formel (18) mit

$$Y = \frac{T}{b - \mu\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

eine Funktion von $b$ bezeichnet, so erhält man

$$P \int Y db + z = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

## V. Erläuterungen und spezielle Formeln.

Die vorstehenden vier Abschnitte enthalten die volle Theorie der barometrischen Höhenmessungen, in einer wohl übersichtlicheren Form, als man sie gewöhnlich vorfindet.

Ehe zu spezielleren Formeln übergegangen wird, mögen hier erst noch einige Bemerkungen vorangehen.

Was zunächst die Reduktion der Barometerstände auf die Normalschwere betrifft, so hat dieselbe auf die Ergebnisse der barometrischen Höhenmessung einen so geringen Einfluss, dass sie eigentlich überflüssig ist.

Vernachlässigt man diese Korrektion jedoch, so hat auch die übertriebene Genauigkeit, mit der man Barometerstände bis auf Hundertstel-Millimeter in Rechnung bringt, absolut keinen Sinn.

Da ausserdem meist so viele Annahmen bei den vorliegenden Problemen gemacht werden müssen, die nur angenähert zutreffen, so könnte man sich hier die ganze Berücksichtigung der Schwereverschiedenheit ersparen, wenn nicht ein Umstand besondere Beachtung verdiente.

Bekanntlich wird das schwer transportable Quecksilberbarometer immer mehr verdrängt durch die Federbarometer. Diese werden von der Schwereverschiedenheit nicht beeinflusst, sondern geben überall unmittelbar die Spannung der umgebenden Luft. Wenn die Korrektionsgleichung*) für ein solches Instrument unter den Normalschwereverhältnissen bestimmt, resp. auf solche umgerechnet wurde, dann giebt es überall den auf $0^0$ und Normalschwere reduzirten Barometerstand, allerdings unter der weiteren Voraussetzung, dass es keine Aenderungen in seinem Mechanismus erlitten hat. Das Gleiche gilt auch von den Thermobarometern, welche den Luftdruck aus der Siedetemperatur des Wassers ergeben.

Die Angaben dieser Instrumente werden also mit den nur auf $0^0$ reduzirten Ablesungen eines Quecksilberbarometers nicht parallel gehen, wenn sie an Orte verschiedener Schwere gebracht werden.

Stimmen sie unter $45^0$ Breite überein, so wird am Aequator das Quecksilberbarometer um ungefähr 2 *mm* höher stehen als das Aneroid oder Thermobarometer.

Das sind Grössen, die nicht vernachlässigt werden dürfen, namentlich wenn man in Rücksicht zieht, dass die Ersatzinstrumente immer vollkommener hergestellt werden und folglich immer mehr neben dem Quecksilberbarometer gebraucht werden. Durch Reduktion des Quecksilberbarometers auf Normalschwere verschwindet die störende Ver-

*) Hierüber vergl. man das Handbuch der barometrischen Höhenmessungen des Verfassers. Weimar, B. F. Voigt.

schiedenheit in den Angaben der verschiedenen Systeme von Barometern, und man hat dann nicht mehr nöthig, stets erst nachzusehen, was für ein Instrument verwendet wurde.

Die meteorologischen Institute haben aus diesen und anderen Gründen in Aussicht genommen, alle Barometerbeobachtungen auf Normalschwere reduzirt zu publiziren. Vorläufig begnügt man sich damit, am Kopfe der Tabellen für eine Station die dieser Station bei mittlerem Barometerstande zugehörige Schwerekorrektion anzugeben. Mit dem Jahre 1893 begann man, die Schwerekorrektion bei den Barometerständen anzubringen, welche bei den täglichen Wetterberichten Verwendung finden.

Merkwürdigerweise stiess aber die allgemeine Einführung des Korrektionsverfahrens bei einem Manne auf Widerspruch, von dem Verfasser es am allerwenigsten erwartet hätte. Das Beobachtungssystem des Königreiches Sachsen hatte es als selbstverständlich betrachtet, dass, da die doppelte Rechnung der Barometerstände, auf Normalschwere reduzirt in den Wetterberichten und nur auf $0^0$ reduzirt bei den übrigen Rechnungen, zu Verwirrungen führen muss, man das erstere Verfahren allgemein einführen werde, und sofort die Schritte gethan, welche zur Einführung derselben in Sachsen nöthig waren.

Der wegen des erwähnten Widerspruches entstehende Schriftenwechsel zog sich so lange hin, dass das Verfahren beibehalten werden musste, auch als es sich leider herausstellte, dass die übrigen deutschen Institute die Korrektion auf Normalschwere erst im nächsten Lustrum, d. h. mit dem Jahre 1896 oder erst 1901 einführen wollen.

Das ist bedauerlich, aber der Schaden ist an und für sich nicht bedeutend, da, wenn die bei uns sehr kleine Korrektion $\Delta b$ am Kopfe einer Tabelle steht, es ziemlich gleichgültig ist, ob in der Tabelle die Werthe $b$ oder $b + \Delta b$ stehen.

Am Fusse einer jeden Tabelle ist fettgedruckt bemerkt, dass die Barometerstände auf Normalschwere reduzirt sind. So ist ein Anfang gemacht, dem sich hoffentlich bald die anderen Institute anschliessen werden.

Der Widerspruch gegen die Einführung der Schwerekorrektion beruht weniger auf theoretischen als auf praktischen Bedenken. Man sagt, dass die Vermehrung der Korrektionen die Beobachter, und zwar namentlich die der ambulanten Stationen, z. B. auf Schiffen, verwirren müsse. Diese Gründe sind aber völlig hinfällig. Für feste Stationen brauchen den Beobachtern nur neue Korrektionstabellen gegeben zu werden, in die die Schwerekorrektionen gleich eingerechnet werden So viel Stationen hat kein Institut zu verwalten, dass ihm hierdurch eine nennenswerthe Arbeit erwachsen würde. Und den Schiffen und Reisenden berechne man Tabellen für die verschiedenen Breiten $\varphi = 45^0 \pm x$, wobei man $x$ etwa von 5 zu $5^0$ vorschreiten lassen kann. Die Beobachter können dann die Tabellen gebrauchen, die ihren Aufenthaltsorten entsprechen.

Man muss stets beachten, dass entweder die Ablesungen am Quecksilberbarometer oder die am Aneroid reduzirt werden müssen, und da erscheint es sicher, dass viel eher der Beobachter, der ein Quecksilberbarometer mit sich nimmt, geeignet sein wird, diese Korrektion auszuführen, als der mit dem Aneroid arbeitende.

Aus den vorstehenden Ausführungen ergiebt sich, dass die Reduktion der Barometerstände auf Normalschwere für Zwecke der barometrischen Höhenmessungen zwar eigentlich keine Bedeutung hat, aber sich doch vertheidigen lässt, und zwar mit Rücksicht auf die verschiedenen Systeme der Instrumente und die anderweitigen Gründe, die diese Reduktion für wissenschaftliche Forschung erheischen.

Was aber die weitere Maassnahme betrifft, wonach der Unterschied zwischen spezifischer Masse und spezifischer Schwere in Rücksicht zu ziehen ist und die zu den Formeln (I) und (III) führte, so ist das eine sinnlose Kleinigkeitskrämerei, ein verwirrender Ballast. Man begreift nicht, wie man bei allen Arbeiten über barometrische Höhenmessungen und damit zusammenhängende Sachen diese Einwirkungen der Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe in einer Weise behandeln konnte, die den Entwickelungen etwas Umständliches, Abschreckendes giebt, so dass man nur schwer sich hindurch zu arbeiten vermochte, oder, wie man gar davon redet, dass die Vernachlässigung der Schwerkraftsänderung zu „ernstlichen Fehlern“ führen könne. Es ist dies alles um so unbegreiflicher, als man über alle anderen Annahmen, als konstante Temperatur, Dunstspannung u. s. w., leicht hinweggeht.

Aus diesen Gründen wurde in der ersten Abhandlung der dort auftretende Faktor $m = 0{,}46\,452$ konstant gerechnet. In Formel (10) dieser Arbeit erscheint hierfür der Ausdruck

$$m = 0{,}46\,449\, f(\psi, h).$$

Da die Formeln speziell für die Verhältnisse in Europa Verwendung finden sollen, wird man $\psi = 51^0$ als einen mittleren Werth der Breite annehmen können und findet, dass dort $m = 0{,}46\,452$ in einer Höhe von 2000 bis 3000 $m$ wird. Der angenommene Werth wird also die durchschnittlichen Schwereverhältnisse in den Regionen der Atmosphäre darstellen, die hier in Betracht zu ziehen sind. —

Die Annahme $T$ und $\sigma$ als konstant führte zu der Formel (20), die eine sehr einfache bequeme Gestalt hat und sich den beiden anerkannten Höhenformeln von Rühlmann und Pernter als gleichwerthig erweist. Wenn man dem allgemeinen Gebrauch gemäss

$$T = {}^1\!/_2\,(T_1 + T_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

aber abweichend von dieser Gepflogenheit

$$\sigma = {}^1\!/_2\,(\sigma_1 + \sigma_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

setzt, so führt eine einfache Rechnung zunächst zu der Reihe

$$l.n.\,\frac{b_1 - \mu\sigma}{b_2 - \mu\sigma} =$$

$$l.n.\,\frac{b_1}{b_2} + {}^1\!/_2\,\mu\left[\frac{b_1 - b_2}{b_2}\cdot\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{b_1 - b_2}{b_1}\cdot\frac{\sigma_2}{b_2}\right] + \ldots.$$

worin die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Weiter hat man

$$l \cdot n \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 - b_2}{{}^1/_2 (b_1 + b_2)} + \ldots.$$

und ist zweifellos

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2} > \frac{b_1 - b_2}{{}^1/_2 (b_1 + b_2)} > \frac{b_1 - b_2}{b_1}.$$

Sobald man die Annahme für zulässig erachtet, dass die Ausdrücke rechts und links durch den mittleren Werth ersetzt werden können, erhält man

$$l \cdot n \cdot \frac{b_1 - \mu\sigma}{b_2 - \mu\sigma} = l \cdot n \cdot \frac{b_1}{b_2} \left\{ 1 + {}^1/_2 \mu \left[ \frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2} \right] \right\}$$

und geht dann Formel (20) in die Gestalt

$$h = 18\,399{,}6\,(1 + 0{,}003\,665\,t)\left(1 + 0{,}377 \left[ \frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b^2} \right]\right) \cdot (1 + 0{,}00\,259 \cos(\psi_1 + \psi_2)) \cdot (1 + 0{,}000\,000\,098(2 z_1 + h)) \log \frac{b_1}{b_2} . \quad (29)$$

über, welche mit der von Pernter auf Seite 167 von Exner's Repertorium der Physik, Bd. XXIV, gegebenen Formel bis auf die dort als 18 399,8 aufgeführte Konstante übereinstimmt.

Schreibt man Formel (29) in der Gestalt

$$h = 18399{,}6 \times \log \frac{b_1}{b_2} \times f(t, \sigma, b, \psi, h),$$

beachtet, dass letztere Funktion wenig von der Einheit verschieden ist und führt

$$\log \frac{b_1}{b_2} = \log \frac{b_{01}\,(1 - 0{,}000\,000\,196\,z_1)}{b_{02}\,(1 - 0{,}000\,000\,196\,(z_1 + h))}$$

ein, worin $b_{01}$ und $b_{02}$ die nur auf $0^0$ C. und nicht auf Normalschwere reduzirten Barometerstände bedeuten, so erhält man

$$h = 18\,428{,}4 f(t, \sigma, b, \psi, h) \log \frac{b_{01}}{b_{02}} \quad . \quad . \quad (30)$$

Diese Formel stimmt mit der von Rühlmann entwickelten nahezu überein. Den Faktor findet Rühlmann gleich 18 429,1. Namentlich unterscheidet sich aber der Korrektionsfaktor $(1 + 0{,}000\,000\,098\,(2 z_1 + h))$ von dem entsprechenden Ausdrucke $\left(1 + \frac{2 z_1 + h}{6\,378\,200}\right)$ in Rühlmann's Formel. Es stimmt jedoch unsere Form mit der von Pernter überein, der nach seinen eigenen Angaben (Seite 163 des zitirten Bandes) die Entwickelung der Höhenformel nochmals vorgenommen hat: „um eine fehlerhafte Voraussetzung in Bezug auf die Abnahme der Schwere mit der Höhe auf den Kontinenten aus der gewöhnlich gegebenen Formel zu eliminiren."

Gestalt der Höhenformel unter Annahme gleichmässiger Abnahme der Temperatur und der Dunstspannung mit der Höhe.

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} T &= T_1 - a(z - z_1) & \sigma &= \sigma_1 - \beta(z - z_1) \\ &= T_0 - a z & &= \sigma_0 - \beta z \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

und finden nach den Formeln (22) und (24)

$$b = \text{Konst.}\,(T_0 - a z)^{\frac{1}{a P}} + \mu\sigma_0 + \frac{\mu\beta P}{1 - aP} T_0 - \frac{\mu\beta}{1 - aP} z \quad (32)$$

Die Einführung der Grenzen lässt aus Formel (32) die Konstante eliminiren und erhält man streng

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{T_1}{a}\left[1 - \left(\frac{b_2 - \mu\sigma_1 - v(P T_1 - h)}{b_1 - \mu\sigma_1 - v P T_1}\right)^{aP}\right] \\ v &= \frac{\mu\beta}{1 - aP} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Diese Höhenformel hat eine zur Zahlenrechnung brauchbare Gestalt und wird sich durch Reihenentwickelung noch weiter vereinfachen lassen.

Die ihr zu Grunde liegenden Annahmen erscheinen vollständig korrekt. Zunächst ist man bisher zu der Ansicht gekommen, dass die lineare Form der Beziehung zwischen Temperatur und Höhe immer die besten Resultate ergiebt, wenn es auch nicht zweifelhaft sein kann, dass der Ausdruck $T = T_1 - a h$ nur als der Anfang einer Reihe für $T$ anzunehmen ist.

Bezüglich $\sigma$ meint man mit den Gliedern $\sigma = \sigma_1 - \beta h$ nicht auszukommen, man glaubt mindestens noch ein quadratisches Glied anhängen oder eine Exponentialformel wählen zu müssen.

Für den vorliegenden Zweck dürfte die Formel (31) genügen, man braucht ja $\beta$ nicht als eine Konstante zu behandeln, sondern kann etwa nach der Formel (48) auf Spalte 102 der zweiten Abhandlung

$$\beta = \sigma_1\,(0{,}000\,246 - 0{,}000\,000\,0157\,h) . \quad . \quad (34)$$

setzen. Die Einführung dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung dürfte voraussichtlich auf Formeln führen, die zu praktischer Verwerthung kaum verwendbar sind, und mit Rechenübungen, zu denen das vorliegende Thema gar zu oft hat dienen müssen, möchte man nun einmal aufhören.

Also wird man die Formel (33) annehmen und einen mit $\sigma_1$ und einer genäherten Höhe $h$ berechneten Werth von $\beta$ in die Gleichung für $v$ einführen. —

Gestalt der Höhenformel unter der Annahme

$$\underline{T = T_1 - a(b_1 - b) \text{ und } \sigma = \beta b + \gamma b^2} \quad . \quad (35)$$

Die Einführung dieser Formeln in Gleichung (26) liefert

$$P T_0 \frac{1}{q} \cdot l \cdot n \cdot \frac{b}{q + r b} + P a \frac{1}{r} l \cdot n \cdot (q + r b) + z = \text{Konst.} \quad (36)$$

worin noch

$$T_0 = T_1 - a b_1,\ q = 1 - \mu\beta,\ r = -\mu\gamma \quad . \quad (37)$$

gesetzt wurden.

Die Einführung der Grenzen ergiebt streng

$$h = \frac{P T_0}{q} l \cdot n \cdot \frac{b_1}{b_2} - \left[\frac{P T_0}{q} - \frac{P a}{r}\right] l \cdot n \cdot \frac{q + r b_1}{q + r b_2} \quad (38)$$

und genähert nach Entwickelung des letzten Gliedes

$$h = P\left[\frac{T_0}{q}\left\{\frac{1}{M}\log\frac{b_1}{b_2} - r(b_1 - b_2)\right\} + (t_1 - t_2)\right] \quad (39)$$

Auch diese Formeln sind für die Zahlenrechnung nicht allzu komplizirt. Die ihnen zu Grunde liegenden Annahmen haben eine gewisse Berechtigung.

Die erste der Formeln (35) ist der Ausdruck für einen Satz in der Meteorologie, wonach die Temperatur in der Atmosphäre proportional mit dem Luftdrucke abnehmen soll. Trotzdem „Zach“ der erste gewesen zu sein scheint, der diese Vermuthung aussprach, wird das Gesetz nach Mendeleef (Mendeleff) genannt, der es im Jahre 1876 neu aufstellte und durch die Luftballonfahrten Glaisher's zu beweisen suchte.

Die in den Formeln auftretende Grösse $T_0$ wird die für $b = 0$ geltende Temperatur sein, mithin die Temperatur des die Erde umgebenden Weltraumes an der Grenze der Atmosphäre bedeuten.

Bezüglich der zweiten der Annahmen unter (35) ist zu bemerken, dass für $b = 0$ auch $\sigma = 0$ sein muss. Es kann aber kaum angenommen werden, dass die Dunstspannung proportional dem Gesammtdrucke zunimmt, und so wurde der Versuch mit einer quadratischen Formel gemacht, die der Integration keine Schwierigkeiten darbietet.

Es scheint sogar, dass die Hinzunahme eines Gliedes mit der dritten Potenz der Höhe die Formeln nicht wesentlich mehr kompliziren würde und jedenfalls im Funktionsverlaufe begründet sein wird.

## Beispiel.

Die Formeln (33) und (38) (resp. 39) können als gleichberechtigt angesehen werden, da sie beide auf Gesetzen beruhen, die als mehr oder weniger streng gültig in der Wissenschaft anerkannt werden.

Einen ganz anderen Charakter hat Form 20. Die Annahme, dass statt der Gesetze, nach denen sich Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt mit der Höhe oder mit dem Barometerstande ändern, bei der Integration einfach eine mittlere Temperatur und eine mittlere Dunstspannung als Konstante eingeführt werden können, würde unbedenklich bei einem Medium von nahezu konstanter Dichte erscheinen. Wenn aber hier die Dichte des Mediums so rasch abnimmt, darf diese Annahme nur nach vorheriger Erörterung der hierbei zu erwartenden Fehler gemacht werden.

Es ist dem Autor nicht bekannt, dass von irgend einer Seite dies geschehen wäre, und weiss er auch nicht, ob dies Laplace gethan hat.

Man würde zum Zweck dieser Untersuchungen die Differenzen zwischen den Ausdrücken (20), (33) und (38) [39] bilden müssen und so die Gleichungen für das Fehlergesetz der Formel (20) bekommen.

Da diese Gleichungen aber nicht einfach werden dürften, erscheint es ausreichend und zweckmässig, die Ergebnisse der nach den einzelnen Formeln aus denselben Beobachtungswerthen berechneten Höhen zu vergleichen.

Rühlmann giebt in seinem bekannten Werke*) als sechsjährige Mittel aus den Beobachtungen im September in Genf und auf dem St. Bernhard:

Genf $t_1 = 14{,}62^0$ C., $b_{01} = 728{,}35\ mm$, $\sigma_1 = 9{,}66\ mm$,
Bernhard $t_2 = 3{,}82$, $b_{02} = 568{,}07$, $\sigma_2 = 4{,}71$.

Weiter ist

$\psi_1 = 46^0\,12'$, $\psi_2 = 45^0\,52'$,
$z_1 = 407\ m$, $z_2 = z_1 + h = 407 + 2070 = 2477\ m$.

Hieraus findet man zunächst

$$b_1 = 728{,}35\left\{1 - 0{,}00\,259\cos 92^0\,24'\right\}\left\{1 - 0{,}000\,000\,196 \times 407\right\} = 728{,}37\ mm,$$

$$b_2 = 568{,}07\left\{1 - 0{,}00\,259\cos 91^0\,44'\right\}\left\{1 - 0{,}000\,000\,196 \times 2477\right\} = 567{,}84\ mm,$$

$$P = 29{,}271\left\{1 + 0{,}00\,259\cos 92^0\,4'\right\}\left\{1 + 0{,}000\,000\,098 \times 2884\right\} = 29{,}277,$$

$P : M = 67{,}414$.

I. Fall: $T = {}^1/_2(T_1 + T_2)$, $\sigma = {}^1/_2(\sigma_1 + \sigma_2)$.

Wir erhalten

$T = {}^1/_2(287{,}62 + 276{,}82) = 282{,}22^0$,
$\sigma = {}^1/_2(9{,}66 + 4{,}71) = 7{,}18\ mm$.

Nach Formel (20) wird alsdann

$$h = 67{,}414 \times 282{,}22 \log\frac{728{,}37 - 0{,}377 \times 7{,}18}{567{,}84 - 0{,}377 \times 7{,}18} = 67{,}414 \times 282{,}22 \times 0{,}10\,859 = \underline{2066\ m}.$$

In Rühlmann's zitirtem Werke findet sich Seite 119: 2065,9 *m*.

II. Fall: $T = T_1 - \alpha(z - z_1)$, $\sigma = \sigma_1 - \beta(z - z_1)$.

Wir erhalten

$$\alpha = \frac{T_1 - T_2}{h} = \frac{10{,}80}{2070} = 0{,}0\,052\,174,$$

$$\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{h} = \frac{4{,}95}{2070} = 0{,}0\,023\,913.$$

Die Formeln (33) führen zu der folgenden Rechnung:

$\alpha P = 0{,}0\,052\,174 \times 29{,}277 = 0{,}15\,275$,
$v = \dfrac{0{,}377 \times 0{,}0\,023\,913}{1 - 0{,}15\,274} = 0{,}0\,010\,641$,
$\mu\sigma_1 = 0{,}377 \times 9{,}66 = 3{,}64\ mm$,
$PT_1 = 29{,}277 \times 287{,}62 = 8421$,
$(PT_1 - h) = 8421 - 2070 = 6351$,
$vPT_1 = 8{,}960$,
$v(PT_1 - h) = 6{,}758$,

$$h = \frac{287{,}62}{0{,}0\,052\,174}\left[1 - \left(\frac{567{,}84 - 3{,}642 - 6{,}758}{728{,}37 - 3{,}642 - 8{,}960}\right)^{0{,}15\,275}\right] = 2066\ m.$$

*) Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig (J. A. Barth) 1870.

III. Fall: $T = T_1 - a(b - b_1)$, $\sigma = \beta b + \gamma b^2$.

Hier wird zunächst

$$a = \frac{T_1 - T_2}{b_1 - b_2} = \frac{10{,}80}{160{,}53} = 0{,}067\,276$$

und damit findet man nach Formel (27)

$$T_0 = 287{,}62 - 0{,}067\,276 \times 728{,}37 = 238{,}62^0 \text{ C.}$$

oder

$$t_0 = -34{,}38^0.$$

Dies stimmt nahezu mit Mendeleff, der im Mittel aus vier Ballonfahrten Glaishers' — $36^0$ C. als die zu $b = 0$ gehörige Temperatur fand. Anderweitige Rechnungen haben allerdings andere Resultate ergeben, die bis zu — $50^0$ C. gehen.

Es muss hier Protest dagegen erhoben werden, dass dem Werthe $T_0$ eine bestimmte physikalische Bedeutung beigelegt wird. Man muss zweifellos

$$T = T_1 - a(b - b_1) + a_1 (b - b_1)^2 + a_2 (b - b_1)^3 + \ldots.$$

als den Ausdruck betrachten, von dem

$$T = T_1 - a(b - b_1)$$

nur die ersten zwei Glieder darstellen. Lässt man die folgenden Glieder weg, weil sie zur Darstellung der Beobachtungen innerhalb der Grenzen derselben nicht nöthig sind, so kann man mit Sicherheit erwarten, dass alle Schlüsse auf Gestaltung der Funktion über die Grenzen der Beobachtungen hinaus für die oberen Regionen der Atmosphäre zu demselben Unsinn führen werden, als z. B. Extrapolationen bei der Temperaturzunahme nach dem Erdinnern zu anerkanntermaassen geführt haben. Es muss dies hervorgehoben werden, da über die Bedeutung dieser „Konstanten" in der Mendeleff'schen Formel bereits gar zu viel höchst Ueberflüssiges geschrieben worden ist.

Die Konstanten der Gleichung $\sigma = \beta b + \gamma b^2$ kann man aus zwei Beobachtungswerthen abzuleiten versuchen. In unserem Beispiele muss

$$4{,}71 = 568\,\beta + (568)^2\gamma,$$
$$9{,}66 = 728\,\beta + (728)^2\gamma$$

sein, woraus

$$\sigma = -0{,}009\,375\,b + 0{,}000\,031\,108\,b^2 \quad . \quad . \quad (40)$$

folgt. Nimmt man hierzu noch die bereits gefundene Formel

$$t = -34{,}38^0 + 0{,}067\,276\,b,$$

so findet man für

| | | | |
|---|---|---|---|
| $b =$ 0 *mm*: | $t = -34{,}4^0$ C., | $s = 0{,}3$ *mm*, | $\sigma =$ 0,0 *mm* |
| 100 | — 27,7 | 0,5 | — 0,6 |
| 200 | — 20,9 | 0,8 | — 0,6 |
| 300 | — 14,2 | 1,5 | 0,0 |
| 400 | — 7,5 | 2,6 | 1,2 |
| 500 | — 0,8 | 4,3 | 3,1 |
| 600 | + 6,0 | 7,0 | 5,6 |
| 700 | + 12,7 | 10,9 | 8,7 |
| 800 | + 19,4 | 16,7 | 12,5 |

Die Werthe $s$ stellen die den Temperaturen entsprechenden Maximalspannungen des Wasserdampfes dar. Man sieht, dass etwa von 400 *mm* an die aus Formel (40) folgenden $\sigma$ zu den $s$ in Verhältnissen stehen, welche nach den Erfahrungen denkbar sind. Die negativen $\sigma$ für die Barometerstände zwischen 0 und 300 *mm* deuten darauf hin, dass zwei Glieder der Reihe für $\sigma$ nicht ausreichen, wenn man die beobachteten Werthe als absolut sicher ansieht.

Betrachtet man Formel (40) als brauchbar, was innerhalb der Grenzen der Beobachtung sicher der Fall ist, so findet man nach den Formeln (37) und (38)

$$q = 1 - 0{,}377 \times -0{,}009\,375 = 1{,}003\,533,$$
$$r = -0{,}377 \times 0{,}000\,031\,108 = -0{,}00\,001\,173,$$

$$\log \frac{q + r b_1}{q + r b_2} = \log \frac{0{,}994\,992}{0{,}996\,875} = -0{,}0\,008\,211,$$

$$\frac{P \cdot T_0}{q} \cdot l \cdot n \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{P}{M} \cdot \frac{T_0}{q} \log \frac{b_1}{b_2}$$
$$= \frac{67{,}414 \times 238{,}62}{1{,}003\,534} \times 0{,}00\,812 = 1733{,}2\ m,$$

$$\frac{P}{M} \cdot \frac{T_0}{q} \log \frac{q + r b_1}{q + r b_2}$$
$$= 67{,}411 \frac{238{,}62}{1{,}003\,534} \times -0{,}0\,008\,211 = -13{,}2\ m,$$

$$\frac{P}{M} \cdot \frac{a}{r} \log \frac{q + r b_1}{q + r b_2}$$
$$= 67{,}414 \frac{0{,}067\,276}{-0{,}00\,001\,173} \times -0{,}0\,008\,211 = +317{,}5,$$

$$h = 1733{,}2 + 13{,}2 + 317{,}5 = 2063{,}9 = \underline{\underline{2064\ m.}}$$

Die genäherte Formel (39) liefert folgende Rechnung:

$$\frac{T_0}{q} \left\{ \frac{1}{M} \log \frac{b_1}{b_2} - r(b_1 - b_2) \right\}$$
$$= \frac{238{,}62}{1{,}003\,533} \left\{ 0{,}248\,961 + 0{,}001\,883 \right\} = 59{,}65$$

und folglich

$$h = 29{,}277\,[59{,}65 + 10{,}80] = \underline{\underline{2063\ m.}}$$

## VI. Schlussergebnisse.

Die vorstehenden Zahlenbeispiele lassen erkennen, dass die Formeln, bei denen mittlere konstante Werthe von $T$ und $\sigma$ einerseits und proportional mit der Höhe abnehmende andererseits bei der Integration vorausgesetzt wurden, absolut übereinstimmende Höhen liefern. Wenn nun auch bei der Verschiedenheit der Formen der Gleichungen mit Sicherheit bei grösseren Werthen von $h$ Differenzen zu erwarten sind, so werden dieselben doch stets so kleine Bruchtheile von $h$ darstellen, dass sie vernachlässigt werden können. Die Formeln (20) und (33) werden also als gleichwerthig zu beachten sein.

Anders ist dies mit Formel (38) und noch mehr mit (39), die etwas kleinere Werthe von $h$ ergeben, ohne dass jedoch die Unterschiede bis zu 2000 *m* von Bedeutung sind.

Diese ganz auffallenden Uebereinstimmungen lassen

das eine Resultat als zweifellos hervorgehen, dass in allen Fällen die Annahme

$$\sigma = {}^1/_2\,(\sigma_1 + \sigma_2) = \text{Konst.}$$

bei der Integration gemacht werden kann.

Die Differentialgleichung (II) wird alsdann die Gestalt

$$P\frac{d\,b}{d\,z} + \frac{b - \mu\,\sigma}{T} = 0$$

annehmen. Hier kann eine neue Bezeichnung

$$B = b - \mu\,\sigma = b - 0{,}2\,(\sigma_1 + \sigma_2) \quad . \quad . \quad (41)$$

eingeführt werden, wobei also $B$ den auf $0^0$ C., auf Normalschwere und wegen mittlerer Feuchtigkeit korrigirten Barometerstand bedeuten wird.

Da $\mu = 0{,}377$ ist, wird ${}^1/_2\,\mu = 0{,}189$ sein und kann hierfür unbedenklich dieser Werth auf 0,2 abgerundet werden. Die Differentialgleichung nimmt alsdann die Form

$$P\frac{dB}{dz} + \frac{B}{T} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

an. Bei der Integration der Gleichung (IV) unterscheiden wir drei Fälle

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ T = {}^1/_2\,(T_1 + T_2) = \text{Konst.} \\ \text{b)}\ T = T_1 - a\,(z - z_1) \\ \text{c)}\ T = T_1 - a\,(B_1 - B);\ T_0 = T_1 - a\,B_1 \end{array}\right\} \quad (42)$$

und erhalten als Höhenformeln

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ h = P \cdot T\,l \cdot n \cdot \dfrac{B_1}{B_2} \\ \text{b)}\ h = \dfrac{T_1}{a}\left[1 - \left(\dfrac{B_2}{B_1}\right)^{aP}\right] \\ \text{c)}\ h = P\left[\ T_0\,l \cdot n \cdot \dfrac{B_1}{B_2} + (T_1 - T_2)\ \right] \end{array}\right\} \quad . \quad (V)$$

Zur Prüfung der Verschiedenheit dieser Formeln sollen folgende Zahlenwerthe angenommen werden:

$$B_1 = 800\ mm, \quad B_2 = 100\ mm,$$
$$T_1 = 297{,}5^0, \quad T_2 = 248{,}5^0$$

und soll einfach

$$P = 29{,}27$$

gesetzt werden.

Formel (V a) liefert

$$\underline{\underline{h = 16\,617\ m.}}$$

Weiter erhält man nach

$$(42\,c)\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{49}{700} = 0{,}07^0\ \text{C.}. \\ T_0 = 297{,}5 - 0{,}07 \times 800 = 241{,}5^0\ \text{C.}, \end{array}\right.$$

also nach (V c):

$$\underline{\underline{h = 16\,135\ m.}}$$

Diese Unterschiede sind bedeutend, sie erreichen 3 Proz. der Höhe.

Wendet man die zweite Formel an, so würde unter Annahme der aus (V a) folgenden Höhe sich

$$a = \frac{49}{16\,617} = 0{,}002\,948^0\ \text{C.}$$

ergeben und würde Formel (V b)

$$\underline{\underline{h = 16\,576\ m}}$$

liefern.

Betrachtet man dagegen die aus (V c) folgende Höhe als zuverlässiger, so ist

$$a = \frac{49}{16\,135} = 0{,}003\,037$$

und giebt dies nach Formel (V b)

$$\underline{\underline{h = 16\,534\ m.}}$$

Also auch hier erweisen sich die Formeln a und b als hinreichend übereinstimmend.

Aber zweifellos geht aus der Rechnung hervor, dass für den Fall, dass sich das Mendeleff'sche Gesetz als richtig erweisen sollte, die gewöhnliche Laplace'sche Formel in ihren verschiedenen Gestalten entschieden zu grosse Werthe von $h$ ergiebt.

Ueber diese Fragen werden uns die immer häufiger zu wissenschaftlicher Forschung veranstalteten Bergsteigungen und Luftballonfahrten wohl bald reiches Material ergeben.

Es möge hier der Wunsch zum Ausdruck gebracht werden, dass in allen den Fällen, wo nicht bei Bergsteigungen und Luftfahrten mittelst trigonometrischer Methoden genaue Werthe der jeweiligen Höhen erlangt werden, die Beobachtungen als Funktionen der Barometerstände ausgedrückt und publizirt werden.

# Ueber Gewitterregen.

Unter den Beobachtungen, welche durch die meteorologischen Stationen ausgeführt werden, kann man diejenigen über die Niederschlagserscheinungen als die wichtigsten bezeichnen. Sie sind bestimmt, Aufschluss zu geben, wie die Natur unseren beständigen Verlust an Wasser durch Abfluss, Verbrauch und Verdunstung ersetzt. Bei dem enormen Werthe, den das Wasser für alle Wesen hat, müssen diese Forschungen Schritt für Schritt ihre Anwendung auf alle die mannigfaltigen Fragen des menschlichen Lebens finden.

Wenn es sich darum handelt, die Möglichkeit der Besiedelung irgend eines Stückes der Erdoberfläche zu erwägen, wird die Frage nach den Wasserverhältnissen eine besonders wichtige Stelle einnehmen. Wie viele ungeheure Flächen giebt es doch, welche sich dazu eignen würden, dem Menschen eine gute Wohnstätte zu bieten, der Erde die ergiebigsten Erträge an Nahrungsmitteln zu entlocken, wenn sie genügend Wasser hätten. In der Mitte grosser Wüsten lassen sich kleine Paradiese schaffen, wo Wasser vorhanden ist.

Und bei uns, was für eine Bedeutung hat das Wasser! Welche Menge von gewerblichen Anstalten liegen nicht an den Flussläufen, die alle ihre Betriebsfähigkeit nur einem kleinen Bruchtheile des als Regen oder Schnee fallenden Wassers verdanken! Der Landwirth sehnt den Regen herbei zur Entwickelung seiner Pflanzen, er fürchtet aber das Zuviel als dieselben schädigend. Nicht nur, wie viel Wasser niedergeht, hat für ihn Interesse, sondern auch in welchen Zeiträumen der Regen fällt. Da er so ganz von dieser Himmelsgabe abhängig ist, fordert er von der sich erst entwickelnden Wissenschaft die Voraussage der bevorstehenden Regenverhältnisse und grollt ihr, wenn sie dies nicht sogleich vermag. Ebenso wie der Landwirth muss aber auch der Ingenieur das Zuviel des Wassers fürchten; dasselbe Element, dessen Bewegung für ihn die nützlichste Arbeitsmenge birgt, bringt allen seinen kühnen Bauwerken Verderben, wenn in den angeschwollenen, die Ufer überschreitenden Flussläufen die grossen Massen mit enormer Geschwindigkeit dahinbrausen und kostbare Arbeitsmengen nutzlos, ja schädigend verloren gehen.

So wird es eine schöne Aufgabe der meteorologischen Institute sein, bei der Sammlung des Materials an Thatsachen, welches zum Studium der komplizirten Mechanik der Atmosphäre dienen soll, und von deren Förderung allein die Fortschritte der Meteorologie und deren Anwendung abhängen werden, stets die praktischen Fragen des Lebens, namentlich aber der landwirthschaftlichen und technischen Kreise der menschlichen Gesellschaft im Auge zu behalten. Der Meteorologe muss stets Umschau halten, wo und wie er sich bei den auftauchenden Tagesfragen nutzbar machen kann. Er muss hinausgehen in das frisch pulsirende Leben und mitten in demselben an seinen Aufgaben wirken.

Auf der anderen Seite wird es aber auch nöthig sein, dass die Vertreter der technischen Wissenschaft und Praxis sich mehr um die Meteorologie kümmern und namentlich sich bemühen, darüber orientirt zu sein, wie die meteorologischen Institute arbeiten und was man von ihnen erlangen kann.

Ich bin Ihnen sehr dankbar, meine Herren, dass Sie mir Gelegenheit gegeben haben, mich vor Ihnen auszusprechen, **und dass ich so von dem Rundschreiben*), das zu dieser Besprechung geführt hat und das eigentlich erst an die meteorologischen Institute hätte gerichtet werden sollen, Kenntniss erlangen konnte.**

Möchte Ihrem Beispiele bald Nachahmung anderwärts zu Theil werden. Nur so wird es möglich sein, die Arbeiten der Meteorologie dem praktischen Leben nutzbar zu machen, nur so wird die meteorologische Forschung auch die Unterstützung und Würdigung in manchen maassgebenden Kreisen finden, welche ich vielfach schmerzlich habe vermissen müssen. — Als ich vor zehn Jahren die Leitung des sächsi-

*) Fragebogen, betreffend die grössten Niederschlags- und Abflusshöhen in Deutschland. Schwerin, Dezember 1891.

schen meteorologischen Institutes in die Hand nahm, befand sich das Beobachtungssystem in einem zur Zeit meines Amtsvorgängers angeregten Aufschwunge.

Die 20 bis 30 alten Stationen waren um eine Anzahl von Regenmessstationen vermehrt worden. Letztere verdankten ihre Entstehung hauptsächlich unseren landwirthschaftlichen Vereinigungen und als Beobachter traten freiwillig Lehrer und Landwirthe ein. Bald verdichtete sich das Netz durch Errichtung von 76 forstlichen Stationen, welche die Kommission für das forstliche Versuchswesen einrichtete.

Während ich 1882 ausser 27 Stationen II. und III. Ordnung*) noch 46 Regenmessstationen hatte, konnte ich 1883 schon 124 solcher Stationen IV. Ordnung, also 151 Gesammtstationen zählen.

Die Zahl aller Arten von Stationen erhöhte sich nach und nach auf 160 bis 170 und erhielt sich auf dieser Höhe.

Wenn ich darnach an dem Anwachsen dieser Beobachtungsstellen einen Antheil nicht nehmen konnte, so war es meine Pflicht, den grossen Apparat zusammen zu halten. Ich glaubte dies dadurch thun zu können, dass ich auf rasche Publikation der Resultate bedacht war, und habe es der Fürsorge des Königl. Ministeriums des Innern besonders zu verdanken, wenn mir hierzu die Mittel zur Verfügung standen.

Dann bin ich darauf bedacht gewesen, die Ergebnisse der Beobachtungen praktisch nutzbar zu machen, und habe, wie dies meine Jahrbücher zur Genüge beweisen werden, in erster Linie mit an das Studium der Wasserwirthschaft gedacht. Leider hinderten mich die vielerlei Arbeiten der Einrichtung und Fundirung des ganzen Systems daran, diese Studien zeitiger intensiv zu betreiben. Ich war der Meinung, dass man vor dem Heraustreten erst sein Haus und dessen innere Einrichtung und Funktion in Ordnung haben müsse. Das ist nun soweit gediehen, dass ich mich berechtigt glaube, an die praktischen Tagesfragen heranzutreten.

Als eine der wichtigsten Erscheinungen der letzten Jahre ist zweifellos das so häufige verderbliche Auftreten starker Regenfälle zu bezeichnen. Was haben dieselben nicht an einzelnen Stellen unseres Vaterlandes für schwere Schäden zu bewirken vermocht! Es war dies ein Grund, der mich veranlasste, schon seit einigen Jahren diesen starken Regenfällen besondere Aufmerksamkeit zu schenken, und ich beabsichtige, Ihnen hier eine Darstellung meines Vorgehens zu geben.

Wenn, meine Herren, anhaltender ergiebiger Regen bei uns fallen soll, so ist eine Hauptbedingung, dass ein vom Meere kommender Luftstrom über uns hinwegzieht und an der schiefen, von Südost nach Nordwest sich herabziehenden Ebene, als welche man Sachsen in der Hauptsache betrachten kann, aufsteigt.

*) Stationen II. Ordnung nennt man die mit Barometer, Psychrometer u. s. w. ausgerüsteten Beobachtungsstellen, an denen täglich mehrmals, gewöhnlich dreimal, die Instrumente abgelesen werden. In Sachsen findet dies jetzt 8 Uhr Vormittags, 2 Uhr und 8 Uhr Nachmittags statt. — Stationen III. Ordnung haben gleiche Einrichtung, es fehlt nur das Barometer. — Stationen IV. Ordnung sind die Regenmessstellen.

Das erkennt man deutlich aus den Wetterkarten.*) Fast an allen ausgeprägten Regentagen sieht man die Windpfeile der englischen Stationen auf das Festland zu stehen. Der Strom feuchter Meeresluft lässt sich dann nach den Windpfeilen der Festlandsstationen verfolgen. Im Geiste sehen wir diese mit Wasserdampf beladenen Luftmassen über uns hinwegziehen.

An der Küste sind sie noch hell und durchsichtig, dort herrscht unter diesen Bedingungen oft heiteres, schönes Wetter. Je höher aber das Festland ansteigt, um so mehr nähert sich die längs desselben dahinfliessende und an ihm aufsteigende Luft dem Sättigungszustande. Es beginnt die Wolkenbildung, die immer dichter wird, je höher das Terrain liegt, und dann zu andauernden durchdringenden, mässig starken, dabei aber recht ergiebigen Regenfällen führt.

Das war so während des denkwürdigen Sommers 1882 der Fall und dazu könnte man noch eine Reihe weiterer Beispiele anführen. — Unter den Tagen mit auffallend ergiebigem Niederschlag im Königreich Sachsen ragen besonders hervor: der 21./22. Juni 1884**) und der 9./10. Juli 1886, die Novembertage 1890 nicht zu vergessen.

Am Mittag den 22. Juni 1884 konnten mehrere unserer Stationen mehr als 100 *mm* Niederschlag notiren. Ein solches Gebiet erstreckte sich längs der Mulde, von der Grenze bis zur Einmündung der Chemnitz. Ein zweites, kleineres lag am Oberlaufe der Zwickauer Mulde, wo Hundshübel 124 *mm* gemessen hat. Am 9./10. Juli 1886 traten die stärksten Regenfälle im oberen Elbthale, etwa von Dresden an, auf. Pirna meldete 156 *mm*, Graupa bei Pillnitz 141 *mm*, Glashütte 110 *mm*, Grumbach bei Wilsdruff 120 *mm*, Dresden 102 *mm* u. s. w. Ein zweiter solcher Zug erstreckte sich vom Greifenstein zum Auersberg; hier hatten Grosspöhla 125 *mm*, Breitenbrunn 103 *mm*, Thalheim 108 *mm*.

Die Regenfälle an beiden Tagen waren sogenannte Landregen, sie verbreiteten sich mehr oder weniger stark über das ganze Land und hatten entschieden keinen Gewittercharakter.

Wir haben von beiden Tagen uns graphische Darstellungen***) gemacht. Aus denselben ist zu ersehen, dass an eine gleiche Dichte der Regenfälle auch nicht im entferntesten zu denken ist. Wir sehen am 21./22. Juni

*) Wetterkarten, welche die Witterungslage in ganz Europa zur Darstellung bringen, geben auf Grund telegraphischer Meldungen in Deutschland: die Seewarte, die meteorologischen Zentralstationen in München, Karlsruhe und Stuttgart und das Königl. Sächs. meteorologische Institut in Chemnitz täglich heraus. — Die Chemnitzer Berichte, welche die Mittheilungen vom Morgen eines Tages enthalten, werden am Nachmittage desselben Tages 4 Uhr dem Bahnhofspostamt übergeben. Darnach kann die Zeit des Eintreffens an einem beliebigen Orte berechnet werden. Man abonnirt auf dieselben nur bei seinem Postamte. Preis vierteljährlich 2 *M*. Probeexemplare stehen stets zur Verfügung.

**) Wir messen den Niederschlag am Mittag und stellen die Menge zu dem Datum des Endes des 24 stündigen Zeitraumes. Die Regenmenge vom 21./22. Juni ist also vom Mittag des 21. Juni zum Mittag des 22. Juni gefallen.

***) Dieselben befinden sich in den Publikationen des meteorologischen Institutes und auf Tafel IX des Jahrganges 1892 des Civilingenieurs. Von einem nochmaligen Abdruck an dieser Stelle konnte Abstand genommen werden.

1884 Stationen, die weniger als 20 *mm* hatten, Plauen sogar nur 5 *mm*; 5 *mm* würden zwar an und für sich schon eine respektable Regenmenge darstellen; wenn man aber die 5 *mm* in Plauen mit den 124 *mm* in dem nicht weit davon gelegenen Hundshübel vergleicht, so erscheinen sie als nur geringfügig. Ganz ähnlich war dies 1886, auch hier standen den enormen Mengen von 156 *mm* an einzelnen Stellen viele Landestheile mit weniger als 20 *mm* gegenüber. Die Durchschnitte aus den Beobachtungen aller Stationen stellen deshalb Zahlen dar, welche die Gesammterscheinung wesentlich abschwächen. Und doch fallen diese Zahlen immer noch hoch aus.

Für den 21./22. Juni 1884 ergaben 141 Stationen zusammen 7733 *mm*, was für die Station 55 *mm* ausmacht. Am 9./10. Juli 1886 betrug die Summe von 147 Stationen sogar 10 130 *mm*, durchschnittlich also nahe 70 *mm*. Man wird also damit rechnen müssen, dass ganz Sachsen im Laufe eines Tages von einer Regenmenge überschüttet werden kann, die auf 1 *qm* durchschnittlich 70 *l* Wasser liefert.

Es fragt sich nun, ob dies vom physikalischen Standpunkte aus möglich ist.

Bei den folgenden Ueberschlagsrechnungen gehe ich von der Grundanschauung aus, dass alles Regenwasser durch Kondensation des Wasserdampfes in der Luft entsteht und dass nur so viel Regen fallen kann, als die Luftströmungen Wasser in Dampfform herbeizuschaffen vermögen.

Ich will mir einen Luftstrom vorstellen, der mit einer Geschwindigkeit von *c m* in der Sekunde über ein Gebiet von *l m* Länge, gemessen in der Richtung der Luftbewegung, dahin zieht. Es soll dabei in der Sekunde aus einer jeden Säule von 1 *qm* Querschnitt eine Menge *m kg* Wasser zur Erde fallen. Da die Zeit *t*, welche eine solche Einheitssäule braucht, um die Strecke *l* zu durchschreiten, $t = l : c$ ist, wird der Wasserverlust der Säule *G* (*kg*) durch die Gleichung

$$G = ml = m\frac{l}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben sein. Der Wasserverlust *G* ist also proportional der Ergiebigkeit *m* und der Länge des Regengebietes (*l*), aber umgekehrt proportional der Geschwindigkeit der Bewegung.

Unter diesen Verhältnissen werden auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche in $\tau$ Sekunden die Anzahl

$$h = m\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Kilogramm Wasser fallen.

Ich habe diese Grösse mit *h* bezeichnet, weil sie auch die Anzahl von Millimetern Niederschlagshöhe darstellt.

Rechnet man den Zeitraum des Regenfalles zu 24 Stunden, so ist $\tau = 86\,400$ Sekunden und mithin

$$h = 86\,400 \cdot m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man den aus (3) sich ergebenden Werth von *m* in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$G = 0{,}0000116\,\frac{h\,l}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Gleichung (4) giebt den Wasserverlust (*kg*) der Einheitssäule (1 *qm* Querschnitt) der Luft, wenn bei *h mm* täglicher Regenmenge auf einem Gebiete von *l m* Länge die Geschwindigkeit der Luftmassen *c m* in der Sekunde beträgt. — Dabei ist also vorausgesetzt, dass die Wasserausscheidung in allen Theilen der über dem Gebiete dahinziehenden Luftmassen absolut gleichmässig sei.

Unsere Hauptregenwinde sind die Nordwestströmungen. In der Richtung derselben kann die grösste Erstreckung des Königreiches Sachsen zu 100 *km* = 100 000 *m* gerechnet werden. Setzen wir diesen Werth in Formel (4) ein, so folgt

$$G = 1{,}16\,\frac{h}{c}.$$

Bei der äusserst schwachen Strömung von $c = 1$ *m* und einem normalen Tagesniederschlage $h = 1$ *mm* würde sich

$$G = 1{,}16\ kg$$

ergeben.

Um beurtheilen zu können, ob dies viel oder wenig ist, müssen wir uns erst nach Zahlen bezüglich des Wassergehaltes der Atmosphäre umsehen.

Den Wasserdampfgehalt der Luftschichten in der Nähe der Erdoberfläche pflegen wir mittelst des Psychrometers zu bestimmen und durch den Druck der Wasserdämpfe in Millimetern Quecksilbersäule (*s*) auszudrücken. Für die Dunstspannung in einer Höhe von *z m* über der Erdoberfläche hat Hann im IX. Bande der Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie (1874) eine Formel gegeben, welche man jetzt noch als gültig betrachtet. Dieselbe lautet:

$$s_z = s\,10^{-\frac{z}{6517}} = s\,(1 - 0{,}000\,246\,z + 0{,}0000\,000\,157\,z^2).$$

Daraus lässt sich für das Gewicht des Wasserdampfes in der Einheitssäule bis zu *z m* Höhe nachstehende Formel entwickeln:

$$Q = \frac{3{,}006}{1 + 0{,}003\,665\,t} \cdot s \cdot (1 - 10^{-\frac{z}{6517}})$$

$$= \frac{1{,}0582}{1 + 0{,}003\,665\,t} \cdot zs\,(1 - 0{,}000\,123\,z + 0{,}0000\,000\,52\,z^2).$$

Die vielen Dezimalstellen dürften bei dem vorliegenden Probleme wenig Zweck haben. Schreibt man die Formel in der einfachen Gestalt

$$Q = \text{Koëffizient} \times s,$$

so nimmt der Koëffizient folgende Werthe an:

| *z* | Koëffizient |
|---|---|
| 1000 *m* | 0,8 |
| 2000 *m* | 1,4 |
| 3000 *m* | 1,8 |
| 4000 *m* | 2,1 |
| 5000 *m* | 2,4 |
| $\infty$ | 2,8 |

Ist mithin die Dunstspannung an der Erdoberfläche 10 *mm*, so enthalten die ersten Tausend Meter einer Luftsäule von 1 *qm* Querschnitt 8 *kg* Wasserdampf, während in der ganzen Luftsäule etwa 28 *kg* sich vorfinden werden.

Der Wasserverlust von 1,16 *kg* der Einheitssäule wird also auf jeden Fall ein immerhin beträchtlicher Bruchtheil der Gesammtmenge sein, wobei zu beachten ist, dass die Dunstspannung 10 *mm* den mittleren Werth dieser Grösse im Sommer darstellt und im Winter diese Zahlen wesentlich kleiner sind.

Es wird hierbei hauptsächlich darauf ankommen, wie hoch der Luftstrom ist, aus dem sich bei seinem Hinziehen über der Erdoberfläche das Wasser ausscheidet.

Wenn wir nun gesehen haben, dass im Juni 1886 70 *mm* durchschnittlicher Regen gefallen sind, so wird dies die dreifache Menge sein, welche eine momentan darüber befindliche Luftschicht an Wasserdampf überhaupt enthielt. Wir müssen also annehmen, dass an diesem Tage ein mächtiger Luftstrom mit grosser Geschwindigkeit über uns hinweggezogen ist. Aus Gleichung (4) erhalten wir für $l = 100\,000$, $h = 70$ den Ausdruck

$$G = \frac{81{,}2}{c}.$$

Die Notirungen der meteorologischen Stationen über die Windstärken an diesem Tage lassen die Annahme von $c = 20$ *m* nicht ungerechtfertigt erscheinen. Das würde dann den Wasserverlust der Einheitssäule zu 4 *kg* ergeben.

Man kann über die Möglichkeit eines solchen Ausscheidens eine Ueberschlagsrechnung anstellen. Ich rechne den Luftstrom etwa 1000 *m* hoch. Hat derselbe unten eine Temperatur von 20°, so wird die Einheitssäule im Sättigungszustande etwa 15 *kg* Wasserdampf enthalten.

Bei der Bewegung über Sachsen muss diese Säule von 100 bis 1000 *m* Seehöhe ansteigen. Nach den Lehren der mechanischen Wärmetheorie kühlt sich gesättigte Luft für jedes 100 *m* Ansteigen um 0,45° C. ungefähr ab, was also hier eine Gesammtabkühlung von 4° bewirken wird. Da auf dem Gebirgskamme die Temperatur des Fusses der Luftsäule nur noch 16° beträgt, vermindert sich das Gewicht des Wasserdampfes in der Säule auf nicht ganz 11 *kg*. Die Ausscheidung von 4 *kg* ist also durchaus möglich, falls die Mächtigkeit des Stromes von 1000 *m* möglich sein sollte.

Es geht aus diesen Rechnungen hervor, dass ein Regenfall von 70 *mm* mittlerer Tagesergiebigkeit auf dem Gebiete des Königreichs Sachsen recht gut denkbar ist, wenn ein Luftstrom von 1000 *m* Höhe mit 20 *m* Geschwindigkeit darüber hinzieht.

Ich will jetzt, um den Einfluss der Länge des Regengebietes recht hervortreten zu lassen, mir vorstellen, der Abfall unseres Erzgebirges nach der Eger zu sei den Nordwestwinden senkrecht gegenübergestellt. Hier können wir den Anstieg von 100 *m* bis zu 1000 *m* Seehöhe auf 10 *km* Horizontaldistanz rechnen. Würde hier ein 1000 *m* hoher Luftstrom mit 20 *m* Geschwindigkeit heranstürmen und bei dem Aufsteigen an dem Gebirgswalle für die Einheitssäule 4 *kg* Wasser abgeben, so würden wir nach Formel (4)

$$h = \frac{86\,400 \cdot G \cdot c}{l} = \frac{86\,400 \times 4 \times 20}{10\,000} = 691\ mm$$

Niederschlag im Laufe eines Tages auf diesem 10 *km* langen Gebiete erhalten.

Diese Zahl klingt ungeheuer; sie verliert aber das Unwahrscheinliche, wenn wir lesen, dass in Tscharapundschi an einem Tage 1000 *mm* gefallen sind und Tage mit 500 *mm* Regenergiebigkeit nicht selten sein sollen, wobei die 13 *m* betragende Jahresmenge ebenfalls nicht wunderbar erscheint. Hier müssen die von den warmen Gewässern des Meerbusens von Bengalen stammenden Luftmassen des Sommermonsun an dem 1500 bis 1800 *m* hohen, steil aus der Ebene des Ganges, Bramahputra und Barak aufragenden Walle des Khasiagebirges ansteigen. Der Ort selbst soll 1250 *m* hoch am Südabhange dieses Walles liegen.

Wenn wir aus den Regenkarten erkennen, dass in unseren Ebenen sich Streifen mit Regenfällen bis 100 *mm* und mehr Tagesergiebigkeit vorfinden, so werden wir aber einen anderen Vorgang annehmen müssen, als die bisher vorausgesetzte Bewegung einer Luftschicht parallel der Erdoberfläche.

Es wird hier an irgend einer Stelle ein aufsteigender Luftstrom stattfinden, nach dem von allen Seiten sich Luft hinbewegt. Diese Säule wird sich mit mehr oder weniger grosser Geschwindigkeit fortbewegen. Die Breite eines Regenstreifens wird ihrem Durchmesser, die Länge ihrer Fortbewegung entsprechen.

Ich will hier als einfachsten Fall annehmen, eine solche Säule habe einen kreisförmigen Querschnitt von $r$ *m* Radius; sie bleibe an ihrem Orte und es bewege sich von allen Seiten an der Erdoberfläche bis zu einer Höhe $z$ *m* die Luft mit der Geschwindigkeit $c$ *m/s* nach der Säule. In einer Höhe $H$ soll dann oben die Luft aus der Säule herausströmen.

Unter diesen Umständen wird sich bald der Wasserdampfgehalt der Luft in der Säule den Temperatur- und Bewegungsverhältnissen anpassen, und man kann alsdann annehmen, dass die Regenmenge gleich der Differenz der Wassermenge ist, welche die Luft hineinnimmt, weniger der mit der oben ausströmenden Luft herausgeführten.

Die in der Sekunde in den Zylinder einströmende Luftmenge ist $2 r \pi c z$. — Enthält der Kubikmeter $\gamma$ Kilogramm Wasserdampf, so werden $2 r \pi c z \gamma$ Kilogramm mit der Luft in den Zylinder eingeführt. In der Einheitssäule steigen mithin auf

$$2 r \pi c z \gamma : r^2 \pi = \frac{2 c z}{r} \gamma\ kg$$

Dampf. Wieviel die Luft oben mit herausnimmt, hängt von der Höhe der Luftsäule ab, da durch diese Temperatur und Volumen der ausströmenden Luft gegeben sind.

Als sicher kann man annehmen, dass ein Bruchtheil $(1 - a)$ der unten einströmenden Wasserdampfmenge mit hinausgenommen wird, sich also $a \frac{2 c z}{r} \gamma\ kg$ in der Einheitssäule ausscheiden, welche ohne weiteres die sekundliche Regenmenge darstellen. In $\tau$ Sekunden werden mithin

$$h = a \frac{2 c z}{r} \gamma \tau\ mm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Regen fallen.

Wenn in einem solchen Gebiete im Laufe eines Tages 100 *mm* niedergehen sollen, hat man in der Formel $\tau = 86400$ und $h = 100$ zu setzen. Der Werth von $\gamma$ kann mit 0,01 *kg* ungefähr in Rechnung gebracht werden, und lehrt eine Betrachtung, auf die ich hier nicht weiter eingehen will, dass man $\alpha$ zu $^1/_3$ wird annehmen können. Durch Einführung dieser Werthe in Formel (5) erhält man

$$c = 0{,}17 \frac{r}{z} .$$

Es wird die zur Erzeugung des Niederschlages von 100 *mm* nöthige Geschwindigkeit also um so grösser sein müssen, je grösser der Radius des Regengebietes und je kleiner die Höhe der einströmenden Luft ist. Für $r = z$, was gar nicht undenkbar ist, würde eine Geschwindigkeit von weniger als 0,2 *m* in der Sekunde genügen. Bei einer Geschwindigkeit von 17 *m*, welche noch lange keinen Sturmcharakter hat, würde $r = 100\,z$ anzunehmen sein, es würde also ein 10 *m* hoher Luftstrom zur Speisung einer Säule von 2 *km* Durchmesser ausreichen.

Wie man sieht, begünstigt der so angenommene Bewegungsvorgang starke Regenfälle ungemein, d. h. soweit es sich um den Herbeitransport der nöthigen Menge an Wasserdampf handelt.

Die Forschungen, meine Herren, die wir in Sachsen seit mehr als fünf Jahren angestellt haben über alle die Gewitter und Hagel betreffenden Erscheinungen, lassen vermuthen, dass wir es hier mit solchen als Luftwirbel auftretenden ähnlichen Bewegungsvorgängen zu thun haben. Die Säulen bleiben nur nicht stehen, sondern bewegen sich mehr oder weniger rasch vorwärts. Hierfür spricht namentlich der lokale Charakter, den alle Gewitterregen mit oder ohne Hagelschlag haben. Ich will nicht sagen, dass dies stets der Fall sein wird, um mich nicht gar zu sehr in Gegensatz zu meinen Kollegen zu stellen; es scheint aber in Sachsen der lokale Charakter der Gewitter der vorwiegende zu sein.

Ich glaube die Forschung über das Wesen der Gewitter dadurch besonders fördern zu können, wenn ich mein Hauptaugenmerk auf die Gewitterregen richte.

Man muss hierbei drei Fragen unterscheiden:

1) Wie stark ist ein Gewitterregen?
2) in welcher Zeit fällt er?
3) auf welchen Flächenraum erstreckt er sich?

Zur Ermittelung der ersten Frage habe ich in den Formularen (siehe nebenstehenden Abdruck), welche wir zur speziellen Berichterstattung über Gewitter ausgegeben haben, zwei Zeilen eingeräumt. Der Beobachter soll möglichst kurz vor dem Ausbruche des Gewitterregens die im Apparate etwa vorhandene Regenmenge bestimmen und dann möglichst rasch nach dem starken Regen eine neue Messung vornehmen und notiren.

Das haben viele Beobachter mit grosser Gewissenhaftigkeit ausgeführt und haben wir so schon werthvolle Angaben erhalten.

Wenn man nun aber auch im Bereiche des Königreiches Sachsen eine viel grössere Anzahl von Regenmessern aufgestellt haben sollte, so ist es doch fraglich, was man damit erreichen kann.

So dicht, dass jedes Gewitter mit dem Kern der grössten Regendichte über mindestens einen Regenmesser weggeht, kann man die Instrumente unmöglich stellen. Das würde im höchsten Grade kostspielig werden, so dass es einfach als unausführbar bezeichnet werden muss, wenn die Regenmesser 1 *km* höchstens von einander entfernt sein sollen, wie dies von anderer Seite gefordert wird. Ich weiss, was es heisst, bei uns einen Regenmesser auf **100** *qkm* zu erhalten, und würde froh sein, wenn ich dieselbe Dichte des Netzes wie in Böhmen mit einem Regenmesser auf **75** *qkm* erreichen könnte.

---

Abdruck eines Formulars.

a) Nummer der Meldung .....
b) Station: ..... No.: ..... K.: ..... ☐ ..
c) Eventueller Standort: ..... ..
d) Tag d. Erscheinung: W.T.: Datum: 18

| Arten der Erscheinungen | | St. | M. | T.-Z. | H.-G. |
|---|---|---|---|---|---|
| **1. Gewitter:** schwach? mässig? stark? — am Ort? nah? fern? — Blitzschaden? Regenschaden? Sturmschaden? Hagelschaden? | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **2. Wetterleuchten:** schwach? mässig? stark? | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **3. Wolkenbildung:** Cirrusfilz? Haufenwolke? Schichtwolke? Trichterschlauch? | um | | | | |
| **4. Blitze?:** wenig h.? häufig? sehr h.? schwach? mässig? stark? — wagerecht? schräg? senkrecht? nach unten? nach oben? — weiss? gelblich? violett? purpurn? Zickzack? Flächenbl.? Verästelt? Kugelbl.? | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **5. Donner?:** wenig h.? häufig? sehr häufig? schwach? mässig? stark? rollend? kurz knallend? Kürzeste Zeit zw. Blitz und Donner: ..... Sekunden | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **6. Regen? Schnee?:** unbedeutend? mässig? stark? — Wolkenbruch? — anhaltend? zeitweise? | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **7. Graupeln? Hagel?** bis Erbsen? bis Haselnuss? bis Wallnuss? grösser? anhaltend? zeitweise? vereinzelt? dicht? rasch fallend? langsam fallend? bleibt liegen? | von | | | | |
| | bis | | | | |
| **8. Wolkenzug:** a) Wolken über dem Orte angelangt | um | | | | |
| b) Wolken ziehen in Entfernung vorüber | von | | | | |
| ohne Zenith zu erreichen | bis | | | | |
| **9. Wind** vorher ..... | | | | | |
| „ während ..... | | | | | |
| „ nachher ..... | | | | | |
| **10. Das Gewitter erreicht seine höchste Entwickelung** | um | | | | |
| **11. Die Menge im Regenmesser war** ..... | um | | | | |
| sie betrug nach dem Gewitter ..... | um | | | | |

**12. Bemerkungen:** (Hierzu auch die Rückseite verwenden und nöthigenfalls ein Stück weisses Papier beifügen.)

Form. 83.

Unterschrift:

Die zutreffenden Fragen deutlich und fest unterstreichen. Tag u. Station zuerst angeben. Tageszeit nicht vergessen. Zuverlässige Zeitangaben unterstreichen. Nachmittag = N, Vormittag = V.

Es ist aber auch nicht nothwendig, zum Studium der starken Regen besondere kunstgerechte Regenmesser aufzustellen. Das Charakteristische der letzteren ist ja die Einrichtung zur möglichst genauen Bestimmung der Regenmengen kleiner und kleinster Ergiebigkeit.

Für Gewitterregen genügt zur Aufsammlung des Regenwassers jedes beliebige Gefäss, das am Boden kein Loch hat und weder in der Stube noch unter der Dachtraufe steht; zum Messen kann jedes Maassgefäss, z. B. ein geaichtes Bierglas, verwendet werden. Kennt man den Flächeninhalt des oberen Randes eines hinausgestellten Gefässes, der ja leicht hinlänglich genau mittelst der Schmiege bestimmt werden kann, und die Anzahl von Litern Wasser, welche hineingefallen sind, so hat man alles, was man braucht, um die Regenmenge in das übliche Maass umzurechnen. Auch hier kann man Theilmessungen vornehmen durch Eintauchen irgend eines Stückchens Holz. Kochtöpfe, Wassereimer, Jauchenzuber, hohe Biergläser u. s. w., alles das sind die Instrumente, welche hier verwendet werden können.

Jeder Gewitterregen kündet sich vorher durch Wolkenbildung, meist durch die eindringliche Stimme des Donners an. Da wird ein Jeder Zeit haben, irgend ein solches Gefäss hervorzusuchen. Man möge sich vorstellen, wie Viele vor Ausbruch eines Gewitters abwartend und müssig dasitzen. Es wird also an Mitarbeitern bei diesen Messungen nicht fehlen, wenn es nur erst bekannt genug sein wird, durch welche einfache Maassnahmen man die Wissenschaft hier unterstützen kann.

Hat man versäumt, vor dem Gewitter ein Gefäss herauszustellen, so sollte man wenigstens nachher Umschau halten, ob sich irgendwo ein solches befindet, das zufällig in günstiger Stellung im Freien gestanden hatte.

Das, meine Herren, sind die Gedanken, nach denen ich während der letzten fünf Jahre meine Handlungen eingerichtet habe und denen ich so oft in Vorträgen und Zeitungsnotizen möglichste Verbreitung zu geben suchte.

Ich wurde darauf geführt, als ich nach der Ueberschwemmung, welche ein schweres Gewitter in der Nacht vom 17. zum 18. Mai 1887 in der Lausitz verursacht hatte, die betroffenen Thäler besuchte. Zur Ermittelung des Wesens dieser Vorgänge vertheilte ich Fragebogen an die Ortsbehörden, deren zweite Frage folgendermaassen lautete:

„2) Hat es besonders stark geregnet? Kann der Regen als Wolkenbruch bezeichnet werden? Wenn nicht, wie kann die Stärke ungefähr charakterisirt werden? Hat vielleicht ein vorher leeres Gefäss oder ein Bassin im Freien gestanden (von dem Dache genügend weit entfernt) und wie weit war dasselbe vom Regenwasser gefüllt worden?“

In der Bearbeitung der uns zugegangenen Antworten durch meinen Assistenten Dr. Birkner, die in meinem Jahrbuche für 1887 publizirt wurde*), findet man auf Seite 8 und 9 die Zusammenstellung des Materiales, welches sich auf diese Frage bezieht. Ich kann hier keine nähere Darstellung von dem Inhalte der dortigen Auseinandersetzungen geben und will nur erwähnen, dass uns die ständigen Stationen der Lausitz vollständig im Stiche gelassen hatten. Nur Zittau hatte 70 *mm* messen können; die Regenmengen der anderen Stationen waren zwar verhältnissmässig hoch, doch lange nicht ausreichend zur Erklärung des ganzen Vorganges.

Als im Jahre 1889 die in Aller Erinnerung stehenden Ueberfluthungen eintraten, versuchte ich es auf ähnliche Weise durch Zeitungsaufrufe und Fragebogen, weiteres Material zu erhalten.

Ich sah aber immer mehr ein, dass ich nur dadurch im Stande sein würde, in dieser Angelegenheit rasch zuverlässiges Material zu schaffen, wenn ich selbst nach jedem besonders starken Regen an Ort und Stelle die nöthigen Erörterungen vornehmen könnte.

So war ich in Reichenbach, wo am 3. Juni 1889 ein sogenannter Wolkenbruch die schweren Verwüstungen bewirkt hatte. Leider kam ich zu spät, um genügende Unterlagen zur Beurtheilung der Regenmengen zu erhalten.

Die von dem Hausmanne der Realschule Herrn Bräuer verwaltete Station IV. Ordnung hatte 70 *mm* gemeldet, ein Regenfall, der in ungefähr einer Stunde niedergegangen zu sein scheint.

Von besonderem Interesse war hier eine Aussage des Todtenbettmeisters, dessen Wohnung sich bei dem hoch jenseits des Eisenbahndammes gelegenen Friedhofe befindet. Derselbe hatte in seinem Garten ein wallartig, einen festgestampften kreisförmigen Fleck umgebendes Blumenbeet hergestellt. Der Durchmesser dieses so hergestellten Hohlraumes wird 1 *m*, die Höhe mindestens 70 *mm* betragen haben. Der als aussergewöhnlich heftig geschilderte Regen soll diesen Hohlraum in etwa 10 Minuten zum Ueberlaufen gefüllt und etwa 15 Minuten angedauert haben.

Bequemer hatte ich es, als am 14. Juni desselben Jahres ein mit Hagelfall verbundenes Gewitter am Adelsberg bei Chemnitz niedergegangen war und einzelne Theile der Stadt Chemnitz unter Wasser gesetzt hatte.

Als ich am frühen Morgen des folgenden Tages längs des Gablenzbaches dem Adelsberg zuging, sah ich in einem Hofe zwei Jauchenwagen mit darauf befindlichen Zubern. Nach bestimmter Aussage des Besitzers des Gutes waren die Zuber leer gewesen und hatten auf den Wagen während des Gewitters im Hofe gestanden. Wir maassen das darin befindliche Wasser mit einem Litergefässe und fanden in dem einen 17, im anderen 16 *l*. Der Durchmesser der oberen Fläche der Kübel war bei beiden 42 *cm*, das gab, auf den Quadratmeter umgerechnet, 110 bis 120 *l*, also eine gleiche Zahl von Millimetern Regenhöhe. Diese Zahlen glaube ich verbürgen zu können. Leider war es mir nicht möglich, bezüglich der Zeit genaue Angaben zu erlangen; es werden aber wohl kaum 3 Stunden gewesen sein. Die weiteren Angaben in meinem Berichte hierüber will ich hier nicht reproduziren. Noch will ich aber einer Messung gedenken, die bei einem Gewitter am 21. Mai 1890 der Herr Gutsbesitzer Hermann Eidner bei Schönau angestellt hatte. Hier ist als sicher zu betrachten, dass

*) Dieser Bericht erschien auch als besondere Broschüre im Buchhandel.

der von den Augenzeugen als ganz aussergewöhnlich stark bezeichnete Gewitterregen eine Stunde angedauert hat und hierbei 60 *mm* Regenhöhe ergab. Die Messung selbst wurde mit einem nachher genau kalibrirten eisernen Topfe vorgenommen. Ich bin hier an Ort und Stelle gewesen. Bezüglich desselben Gewitterregens liegt noch die Meldung des Herrn Forstassessors Jordan vor, nach welcher in einer Stunde mindestens 70 *mm* gefallen sind.

Unter allen diesen angeführten Fällen hat entschieden die Angabe für Reichenbach das grösste Interesse.

Hier sollen in **10** Minuten mindestens **70** *mm* Regen gefallen sein.

Unter der Annahme, dass dieser Regen im Zentrum eines Luftwirbels stattgefunden hat, nach dem von allen Seiten die Luft zuströmte, und der dabei stillgestanden oder sich nur sehr langsam bewegt hat, können wir die früher gefundene Formel

$$h = a\frac{2cz}{r}\gamma\tau$$

anwenden und dieselbe in der Form

$$c = \frac{h}{2a\gamma\tau}\cdot\frac{r}{z}$$

schreiben.

Im vorliegenden Falle sind uns $h = 70$ *mm* und $\tau = 600\,s$ gegeben. Ich nehme $a = 1/3$, $\gamma = 0{,}01$ an und erhalte

$$c = 17{,}5\,\frac{r}{z}\cdot$$

Aus dieser Formel ist zu ersehen, dass $r$ nicht viel grösser als $z$ gewesen sein darf, wenn die Geschwindigkeit des Windes nicht über die Grenzen des Wahrscheinlichen angenommen werden soll. Bei $r:z = 2$ würde die zuströmende Luft die Stärke eines starken Sturmes gehabt haben müssen.

Sofern man annimmt, dass der Durchmesser der Säule nicht gross gewesen ist, dann wird auch eine mässige Geschwindigkeit der Luft zum Herbeitransporte der Wasserdampfmenge genügt haben und ist deshalb ein derartiger Regenfall von 70 *mm* in 10 Minuten auf kleinem Gebiete als durchaus möglich zu bezeichnen.

Schwerer als die Menge des Niederschlages ist die Zeit zu bestimmen, da die Stärke des Regenfalles so ausserordentlichen Schwankungen unterliegt. Wir müssen uns also damit begnügen, die Stärke als gleichmässig in der Zeit anzunehmen, welche die Beobachter für den Gewitterregen angeben. Das sind manchmal nur wenige Minuten und dann wieder oft mehrere Stunden.

Ich habe seit 1886 so ausführlich wie möglich die uns zugegangenen Messungen gesammelt und in meinen Jahrbüchern veröffentlicht.*)

*) Ich will hier nur auf die Hauptstellen verweisen:
Jahrbuch 1886: Abtheilung III, Seite 50, 51, 111—113.
„ 1887: „ II, „ 108.
„ III, „ 8, 9, 24—26, 98.

Aus dem Gesammtergebnisse glaube ich vertreten zu dürfen, dass 60 *mm* Regen recht gut im Zeitraume von einer Stunde fallen können, möglicherweise schon in kürzerer Zeit, und dass Regenfälle von 100 bis 200 *mm* Gesammtergiebigkeit im Zeitraume von etwa 3 Stunden auch als durchaus möglich und thatsächlich vorgekommen anzusehen sind. —

Die grösste Schwierigkeit macht uns die dritte Frage nach der Grösse der Fläche, auf welcher die Gewitterregen sich erstrecken.

Ich glaube, dass wir hier durch noch so starke Vermehrung der Regenmesser, sowohl ständiger als auch ad hoc errichteter, kaum zum Ziele kommen werden. Wir werden uns dabei wohl auf ein anderes Gebiet begeben und aus den abströmenden Wassermengen einen Schluss auf die Regenmenge zu machen suchen müssen.

Es wird dies den Vortheil haben, dass man hier das zu bestimmen sucht, was den eigentlichen praktischen Werth hat.

Da wird es sich also darum handeln, möglichst rasch nach dem Niedergehen eines starken Regens an Ort und Stelle zu sein Man wird alle die Mittel zu verwenden suchen, welche einen Schluss auf die Regenmenge gestatten, und wird namentlich über die Ausbreitung des Regens Erkundigungen einzuziehen haben.

Dann wird es sich um die Ermittelung der abgeflossenen Wasserquantitäten handeln.

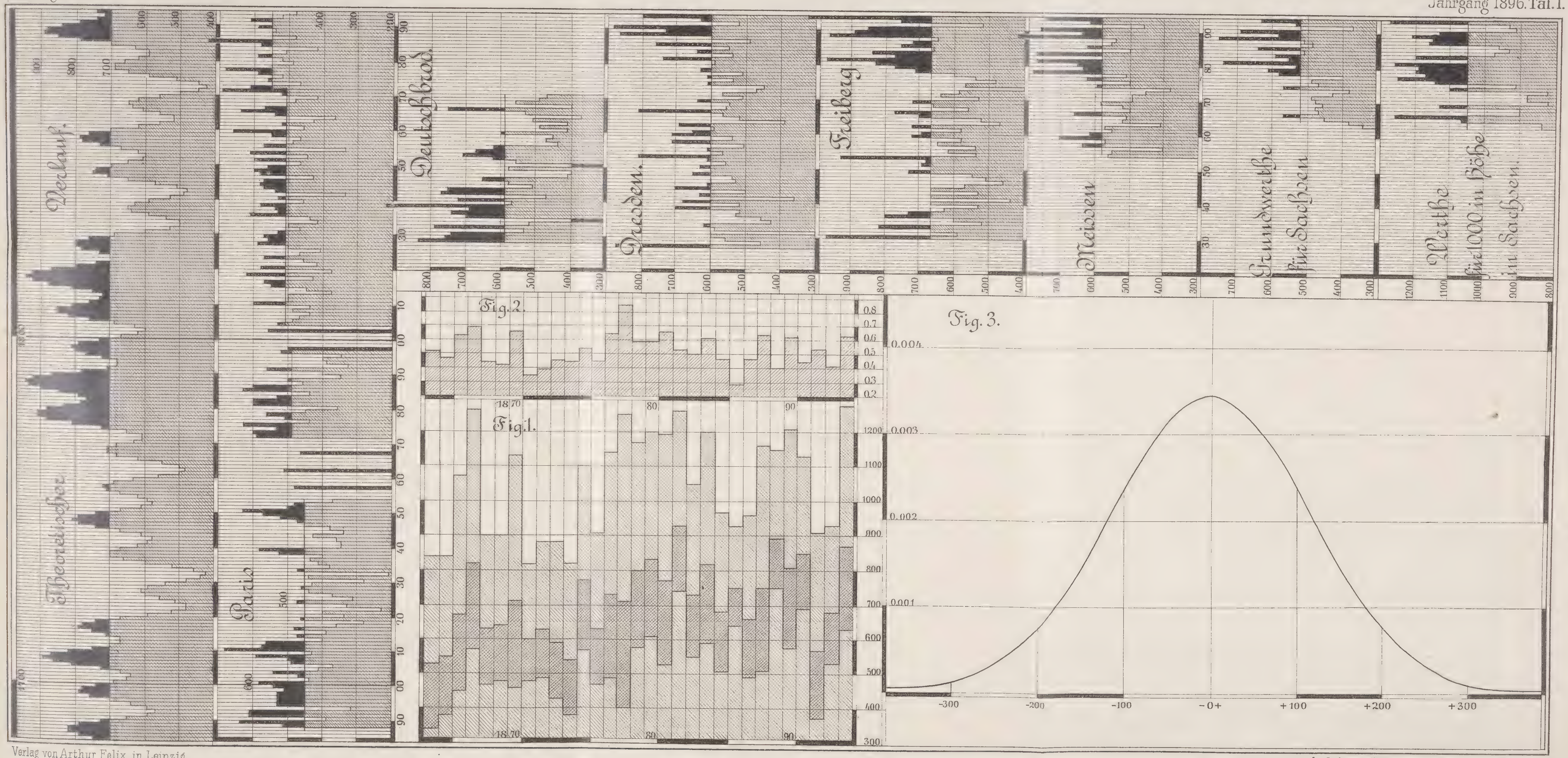
Das „Wie“ dieses Vorgehens lässt sich schwer im Allgemeinen voraussagen. In den meisten Fällen wird man aber wohl irgend einen Wasserlauf haben, bei dem es sich bestimmen lässt, bis zu welcher Höhe die Fluthen gestiegen waren. Durch Profil- und Gefällemessungen wird man hier die Grundlagen zur ungefähren Taxirung der zum Abfluss gelangten Wassermassen erlangen können.

Ich gedenke, in den nächsten Jahren diesen Forschungen möglichste Aufmerksamkeit zu schenken, und bin überzeugt, dass ich zu guten Resultaten werde kommen können, wenn es mir nur irgend möglich sein wird, eine umgehende telegraphische Benachrichtigung von jedem bemerkenswerthen Vorgange dieser Art im Bereiche des Königreiches Sachsen zu erlangen.

Jahrbuch 1888: Abtheilung II, Seite 110.
„ „ „ III, „ 98, 99, 130 und 131.
„ 1889: „ II, „ 110.
„ III, „ 4—6, 51, 52, 80, 81.
„ 1890: „ II, „ 113.
„ III, „ 5, 44, 45, 59, 60.
„ 1891: „ II, „ 115.
„ III, „ 74.
„ 1892: „ II, „ 112.
„ III, „ 79.
„ 1893: „ II, „ 112.
„ III, „ 52.
„ 1894: „ II, „ 115.
„ III, „ 51.

Die Jahrbücher erscheinen im Kommissionsverlage der C. Brunner'schen Buchhandlung (Martin Bülz) in Chemnitz.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.




Verlag von Arthur Felix in Leipzig.

Lith. Anst. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

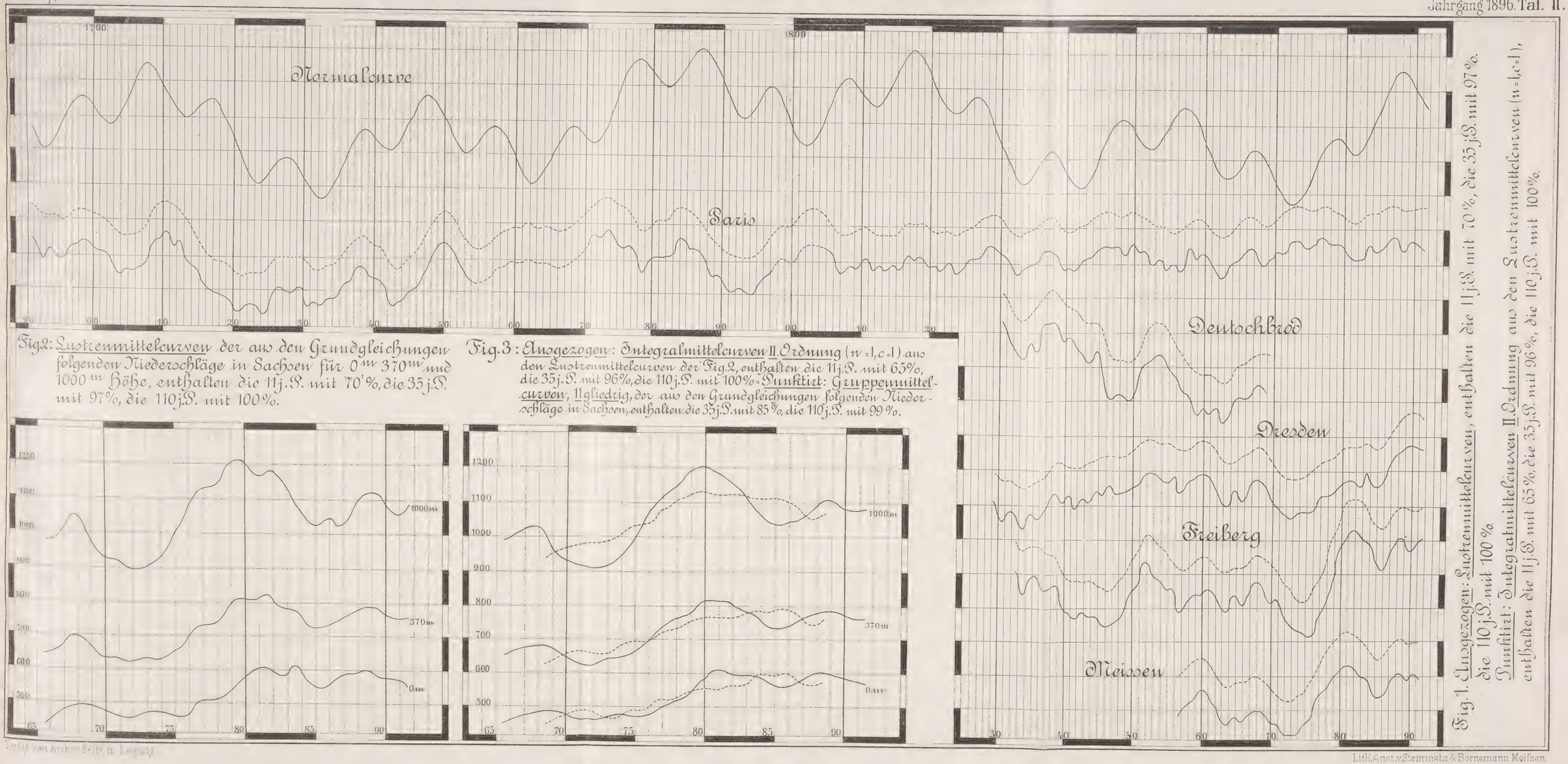



Fig. 1. Ausgezogen: Lustrenmittelcurven, enthalten die 11 j.P. mit 70%, die 35 j.P. mit 97%. die 110 j.P. mit 100%. Punktirt: Integralmittelcurven II. Ordnung aus den Lustrenmittelcurven (n=1, c=1), enthalten die 11 j.P. mit 65%, die 35 j.P. mit 96%, die 110 j.P. mit 100%.

Fig. 2: Lustrenmittelcurven der aus den Grundgleichungen folgenden Niederschläge in Sachsen für 0m 370m und 1000m Höhe, enthalten die 11 j.P. mit 70%, die 35 j.P. mit 97%, die 110 j.P. mit 100%.

Fig. 3: Ausgezogen: Integralmittelcurven II. Ordnung (n=1, c=1) aus den Lustrenmittelcurven der Fig. 2, enthalten die 11 j.P. mit 65%, die 35 j.P. mit 96%, die 110 j.P. mit 100% = Punktirt: Gruppenmittelcurven, 11gliedrig, der aus den Grundgleichungen folgenden Niederschläge in Sachsen, enthalten die 35 j.P. mit 85%, die 110 j.P. mit 99%.

Lith. Anst. v. Steinmetz & Bornemann. Meissen.

Fig. 2: Punktirt: Quotenmittel in Procenten der vieljährigen Mittel nach Brückner. - Ausgezogen: Integralmittelcurven II. Ordnung (n=1, c=3) aus vorigen, enthalten die 11j. P. nicht, die 35j. P. mit 79%, die 110j. P. mit 98%.

Fig. 1: 11gliedrige Gruppenmittelcurven I. Ordnung, enthalten die 11j. P. nicht, die 35j. P. mit 99% der Amplituden der Theilcurven.

Verlag von Arthur Felix in Leipzig

Lith. Anstv. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

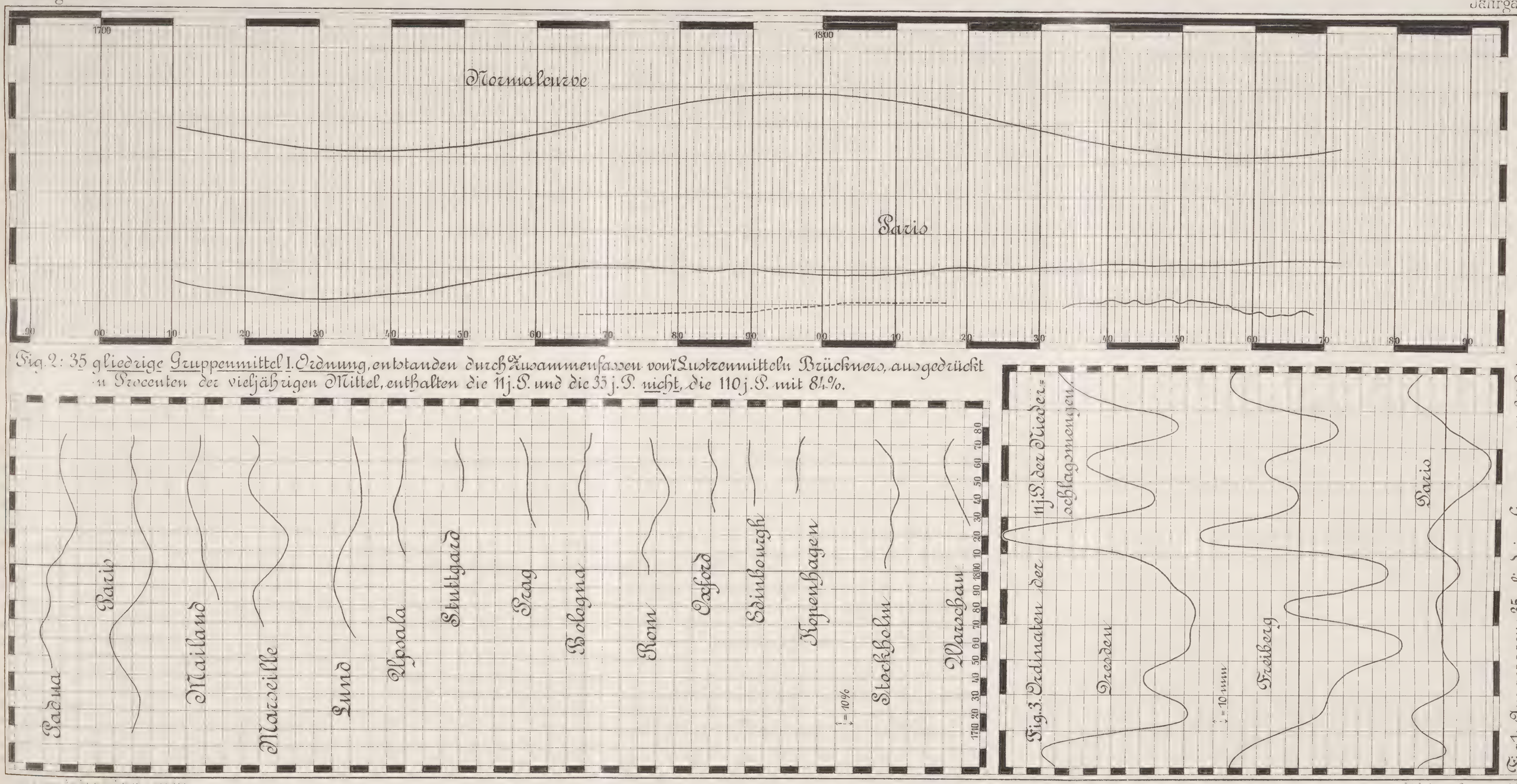



Fig. 2: 35 gliedrige Gruppenmittel I. Ordnung, entstanden durch Zusammenfassen von 7 Lustrenmitteln Brückners, ausgedrückt in Procenten der vieljährigen Mittel, enthalten die 11 j.S. und die 35 j.S. nicht, die 110 j.S. mit 84%.







Fig. 1: Ausgezogen: 35 gliedrige Gruppenmittel II. Ordnung aus den 11 gliedrigen Gruppenmitteln der Tafel VI, enthalten die 11 j.S. und die 35 j.S. nicht, die 110 j.S. mit 83%-Punktirt: 11 gliedrige Gruppenmittel III. Ordnung, aus vorigen Gruppenmitteln gebildet, enthalten auch die 11 j.S. nicht. - Nebenfigur: 35 j.S. der Niederschlagsmengen in Paris.

Lith. Anst. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen

Druck von C. Grumbach in Leipzig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schreiber, Paul

Vier Abhandlungen über Periodizität des Niederschlages, theoretische Meteorologie und Gewitterregen

Leipzig 1896

4 Phys.sp. 1 eh-1/5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11795921-4